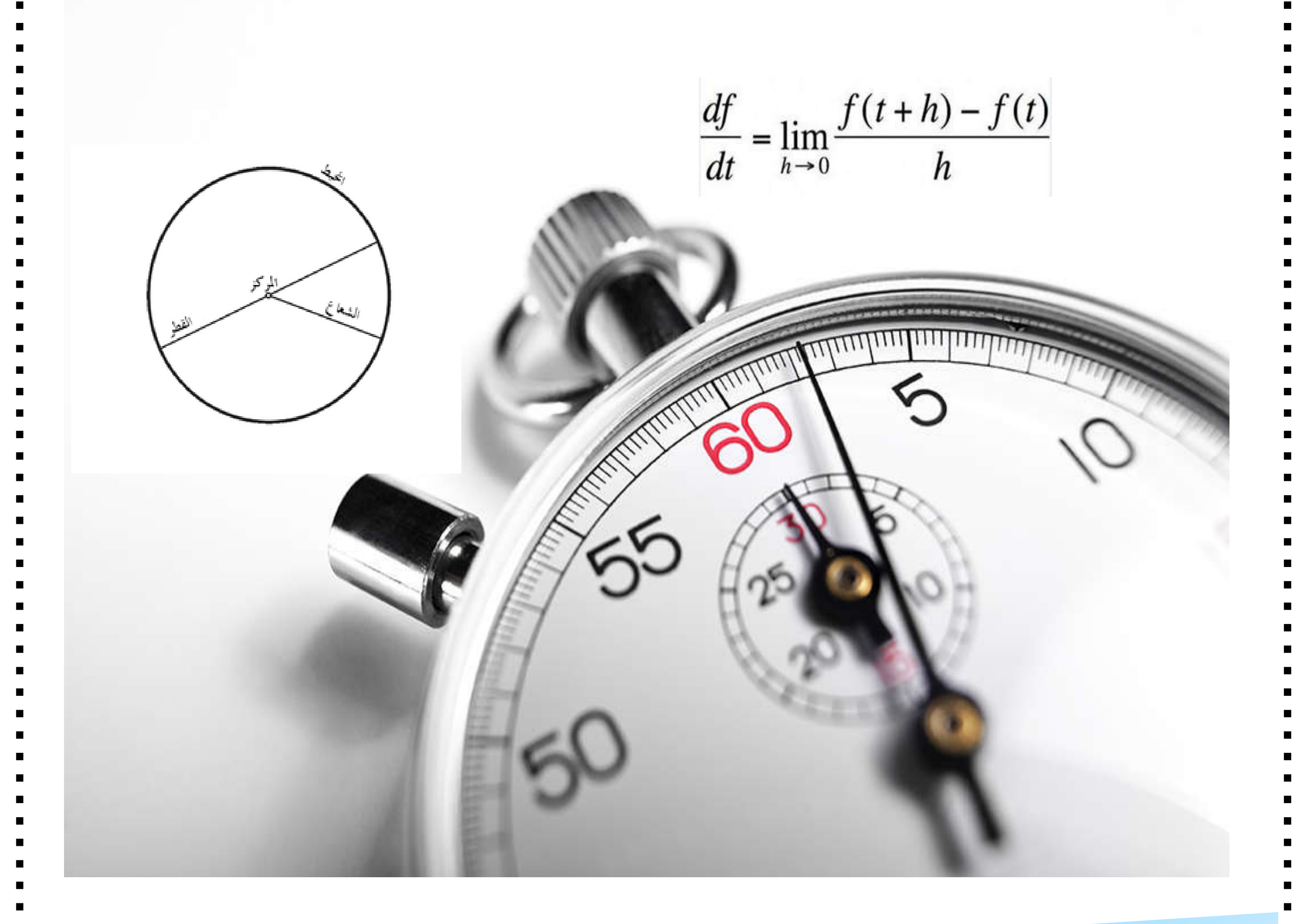
سلسلة

الرياضيات في دقيقة



ترجمة

حوري مديحة

الصادرة عن مجلة

Plus

2016-2009

إهداء

إلى أمي... وكفى

وأكثر من أي وقت مضى

نبذة عن Plus: مجلة إلكترونية تصدر على الأنترنت https://plus.maths.org/content/. تابعة لجامعة كامبريدج البريطانية. وهي جزء من *مشروع الرياضيات للألفية* (the Millennium Mathematics Project). تهدف المجلة إلى إدخال القراء إلى عالم الرياضيات الجميل والتطبيقات العملية له. لأن الكثير من الأشخاص لا يملكون فكرة واضحة عما تحتوية الرياضيات *الحقيقية* من مُتعة. وغالبا لا يدركون الكم الهائل من الأشياء التي ما كان بالإمكان إنجازها من دون مساعدة الرياضيات. بل قد يمتد بهم الأمر إلى الاعتقاد أنها مدعاة للملل! إن كنت شخصا من أولئك، فقراءة مواضيع ومقالات المجلة قد تغير لك تلك الصورة النمطية الخاطئة عن الرياضيات.

نبذة عن السلسلة: عبارة عن سلسلة مقالات ***قصيرة جدا*** ، ***دقيقة واحدة فقط*** كافية لإتمام قراءة كل مقال منها! تصدر بشكل مقالات مُستقلة وعلى فترات غير منتظمة على المجلة من سنة 2009 إلى الآن 2016، ولازالت مستمرة الصدور تباعا على صفحتها. تسلط الضوء على مواضيع شديدة التنوع، وذلك من وجهة نظر الرياضيات. تقدم فكرة عامة فقط عن تلك المواضيع، من باب التنبيه لها، أو لفت الإنتباه لعلاقتها بالرياضيات، أو الإشارة إلى جانب الرياضيات فيها، وذلك لتنوير القاريء، وإستثارة فضوله لمعرفة المزيد!

نبذة عن المترجم: *حوري مديحة* ، أستاذة تعليم ثانوي في التاريخ والجغرافيا، خريجة المدرسة العليا للأساتذة، قسنطينة، الجزائر . أهوى الرياضيات وأغلب قراءاتي فيها، اجتزت بنجاح مساقات فيها عبر منصات مثل Coursera و Edx و Edraak. راقت لي مقالات *الرياضيات في دقيقة* في المجلة ، فقمت بترجمتها للعربية ونشرها على مدونتي الإلكترونية. https://hourinotes.wordpress.com/.

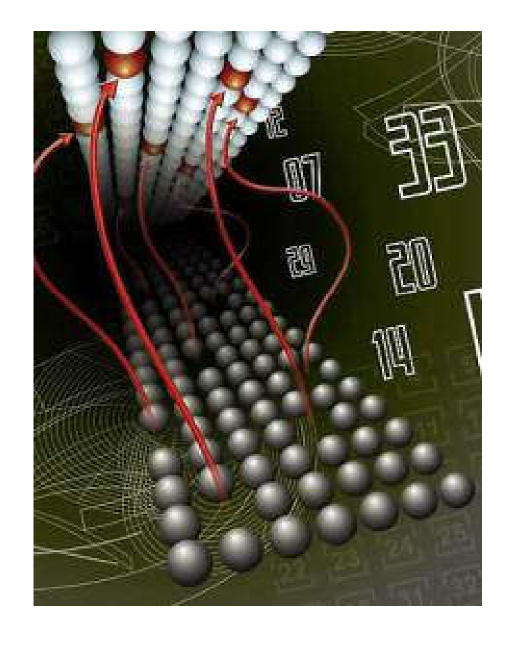
ونظرا للنجاح الذي لاقته السلسلة. واقتراح البعض ضرورة دمجها في ملف واحد. قررت تجميعها في كتاب إلكتروني مجاني (غير قابل للتداول التجاري) ليستفيد منه الجميع.

تنبيه: المقالات المترجمة الأصلية والموجودة في المدونة، تحتوى على روابط إثرائية لأغلب المواضيع بإمكانك الرجوع إليها للاستزادة. كما أن ترجمتي للمقالات كانت بشكل فردي ومستقل، أي لم تخضع لأي مراجعات معتمدة. لذلك أرحب بأي مراجعات معتمدة لمقالات السلسلة وذلك إما على صفحات المدونة، أو عن طريق مراسلتي مباشرة على math.nights@gmail.com وشكرا مقدما.

الفهرس

التوافقيات

(combinatorics)



بما أننا في موضوع الاحتمالات، دعونا نُجب على واحد من بين أسئلة الرياضيات المهمة تلك: ما هي حظوظ فوزك في اليانصيب؟

في يانصيب المملكة المتحدة عليك اختيار 6 أرقام من 49، ومن أجل الحصول على فرصة للفوز بالجائزة الكبرى، أنت في حاجة أن تأتي جميع أرقامك الـ6 في السحب الرئيسي. لذا فان السؤال في الحقيقة هو كم عدد التوافقيات المُحتملة من 6 أرقام والتي يمكن سحبها من 49؟ هناك 49 احتمال للرقم الأول، 48 للثاني، وهكذا إلى 44 احتمال للرقم السادس، إذن هناك $48\times 47\times 46\times 45\times 44 = 10068347520$ طريقة اختيار لهذه الأرقام الستة...في هذا الترتيب. لكننا لم نُعر اهتماما بأي ترتيب سيتم التقاط أرقامنا، وعدد الطرق المختلفة لالتقاط 6 أرقام هي $6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 6! = 720$ وبناءا عليه أرقامنا الستة هي واحدة من $\frac{49\times 48\times 47\times 46\times 45\times 44}{6!} = 13983816$ وبالتالي لدينا فرصة واحدة من بين حوالي 14 مليون للظفر بالجائزة الكبرى.

لكن وفق ملاحظة نيرة، لقد اكتشفنا للتو حقيقة رياضياتية مفيدة جدا: عدد التوافقيات لحجم k (مجموعات من الأشياء وبأي ترتيب لا يهم) من مجموعة أوسع من حجم n هي $n!/(n-k)!/k!$

هذا النوع من البراهين ينتمي إلى قلب التوافقيات، رياضيات العَد. قد لا تُساعدك على الفوز باللوتو، لكن قد تُبقيك بصحة جيدة. فهي تُستخدم لفهم كيفية تكاثر وتحول الفيروسات كالأنفلونزا، من خلال تقييم فرص خلق فيروسات قابلة للحياة من إعادة تركيب عشوائي لقطع جينية.

****

أخيل والسلحفاة

(Achilles and the tortoise)



أخيل و سلحفاة، يتنافسان في 100 متر، عدو سريع. واثقا من انتصاره، أخيل أتاح للسلحفاة أن تبدأ بمسافة 10 متر أمامه. السباق انطلق، أخيل يقترب مسرعا عن السلحفاة التي تسير متثاقلة على طول المسار، لكن، عندما وصل أخيل النقطة (أ) من حيث انطلقت السلحفاة، كانت هي قد زحفت على طول مسافة صغيرة إلى النقطة (ب)، وفي ومضة، وصل أخيل لـ(ب)، لكن السلحفاة أصبحت فعليا عند النقطة (ج)، عندما وصل (ج)، السلحفاة في (د)، وصل (د)، السلحفاة عند (هـ)...وهكذا...اِنه لن يلحق أبدا السلحفاة، حتى اِنه لا يوجد لديه فرصة للفوز في السباق !

شيء ما خاطئ هنا، لكن ما هو؟ دعنا نفرض أن أخيل 10 مرات أسرع من السلحفاة، وأن كليهما يتحرك بسرعة ثابتة، في الوقت الذي يستغرقه أخيل لاجتياز الـ 10 متر الأولى إلى النقطة (أ)، تكون السلحفاة، والتي هي أبطأ بـــ 10 مرات منه، اجتازت فقط 1 متر إلى النقطة (ب)، مع الزمن، أخيل انتقل 1 متر إلى النقطة (ب)، السلحفاة زحفت على طول المسار بـ 0.1 متر للنقطة (ج)، وهكذا...بعد (ن) من هذه الخطوات، السلحفاة انتقلت:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots+\frac{1}{10^{(n-1)}}$$ متر.

وهنا.. أين يكمن الخلل في الفرضية، السلحفاة لن تغطي أبدا الـ 90 متر بأن تقطعها باستخدام خطوات كتلك، مهما كان عدد الخطوات التي عليها اِجتيازها. في الواقع، المسافة التي تغطيها بهذه الطريقة لن تتجاوز أبدا الـ $\frac{10}{9}=1.111$، وهذا بسبب أن المتتالية هندسية

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$$

متقاربة عند الـ$\frac{10}{9}$ ... وبما أن السلحفاة تنتقل بسرعة ثابتة، فهي تغطي هذه المسافة في وقت محدود (منته)، وهو على وجه التحديد ما يجعل أخيل يتفوق عليها في النهاية.

– تُعرف هذه المسألة باعتبارها واحدة من *مفارقات زينون*، الفيلسوف اليوناني القديم، والذي استخدم مفارقات مثل هذه، ليوضح أن الحركة هي مجرد وهم.

****

مُفارقة سمبسون

(Simpson's paradox)

لنفرض أنك تحاول أن تقرر إلى أي جامعة تريد الذهاب. ووجدت أن الجامعة التي تهتم بها قد وافقت في العام الماضي على 30% من المتقدمين من الذكور لكن 21.3% فقط من المتقدمين من الإناث. يبدو وكأنه حالة تحيز واضح ضد المرأة، لذلك كنت تميل إلى الذهاب إلى مكان آخر. لكن بعد ذلك نظرتَ إلى المشهد مرة أخرى، هذه المرة بعد تفكيكه حسب القسم، الجامعة لديها فقط قسمين، الرياضيات والانجليزية. قسم الرياضيات وافق على 40% من المتقدمين الذكور و 42% من المتقدمين الإناث. قسم الرياضيات وافق على 10% من المتقدمين الذكور و 11% من المتقدمين الإناث. ومنه إذا نظرت إلى المشهدين حسب القسم، إذا كان هناك شيء، فهناك تحيز لصالح المرأة. ماذا يحدث هنا؟



هذا مثال عن مفارقة سمبسون، والتي تنشأ عندما تنظر إلى النسب المئوية من دون إعطاء الأرقام الفعلية المعنية. لنفرض أن قسم الانجليزية وافق فعليا على نسبة عالية من المتقدمين، في حين قسم الرياضيات هو أكثر إنتقاءا ووافق على نسبة ضئيلة فقط. الآن لنفرض أن أغلب المتقدمين الذكور سجلوا في قسم الانجليزية. وهذا ساهم في رفع النسبة الإجمالية للناجحين من المتقدمين الذكور، على اعتبار أن اجتياز الانجليزية أسهل. و بالمثل، إذا سجلت معظم النساء في قسم الرياضيات، فهذا سيساهم في خفض (التقليل من) النسبة

الإجمالية للناجحات من المتقدمين النساء، لأن اجتياز الرياضيات أصعب. لذلك يمكن أن يحدث هذا، على الرغم من أن ولا قسم يتحيز ضد المرأة، النسبة الإجمالية للنجاح للمتقدمين الإناث هي أقل مما هي عليه بالنسبة للذكور.

دعنا نعد للمثال: لنفرض أن 100 رجل سجلوا في قسم الانجليزية، إذا هذا يعني أن 40 منهم يعطينا (40%). لنفرض أن هناك 50 امرأة فقط سجلن في قسم الانجليزية، إذا 21 منهن تعطينا (42%). لنفرض أن قسم الرياضيات لديه فقط 50 من المتقدمين الذكور، إذن 5 تعطينا (10%)، و 100 أنثى متقدمة، أين 11 تعطينا (11%). ومنه النسبة الإجمالية للمتقدمين من الذكور الذين نجحوا هو $\frac{45}{150}$ والذي يوافق 30%. بالنسبة للإناث النسبة الإجمالية هي $\frac{32}{150}$ والذي يوافق 21.3%. الغموض تم حله.

هذه المفارقة ليست مجرد فضول نظري. في سنة 1973 تم رفع دعوى قضائية ضد جامعة كاليفورنيا في بيركلي عن التحيز الجنسي على أساس الأرقام، والتي كانت مثالا عن مفارقة سمبسون. إذ اتضح أن معظم النساء كُن قد سجلن في أقسام أكثر تنافسية وهذه كيفية ظهور ما بدا على أنه تحيز.

****

القباب الجيوديسية

(geodesic domes)

الأسطح المنحنية المثيرة لبعض المباني البارزة التي تم إنشاؤها في العقد الماضي، مثل *برج 30 سانت ماري الفأس* أو *برج سويس ري* في لندن (الموضح في الصورة)، ليست سوى انجازات ممكنة لوجيستيا واقتصاديا بفضل الرياضيات. ألواح الزجاج المنحنية أو غيرها من المواد هي مواد باهضة الثمن من حيث التصنيع ومن حيث التصفيح (جعلها مُستوية). المثير للدهشة، أنه تم إنشاء السطح المنحني للجيركين (شكل المبنى المُشابه للخيارة) بالكامل تقريبا من ألواح الزجاج المسطح – القطعة الوحيدة المنحنية هي الغطاء أعلى المبنى. والهندسة البسيطة هي كل ما نحتاجه لفهم كيف؟

من الطرق لمقاربة سطح منحني باستخدام ألواح مُسطحة هي استخدام فكرة القباب والسطوح الجيوديسية. الجيوديسي هو مجرد خط بين نقطتين يتبع أقصر مسافة ممكنة– على الأرض الخطوط الجيوديسية هي دوائر عظمى، مثل خطوط الطول أو المسارات التي تستخدمها مركبة جوية من أجل المسافات الطويلة. يتم إنشاء القبة الجيوديسية من شبكة الجيوديسيات التي تتقاطع لتغطي السطح المنحني وفق مثلثات. عالم الرياضيات *بوكمينستر فولر* فضل الأفكار الرياضياتية وراء القباب الجيوديسية وأعرب عن أمله في أن مميزاتها – قوة ومساحة، أكبر من أجل حد أدنى للوزن– قد تُمثل مستقبل الإسكان.

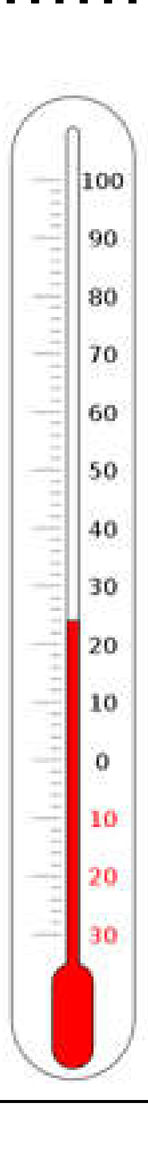
لإنشاء كرة من ألواح مسطحة، مثل كرة جيوديسية، تحتاج أولا إلى تخيل *عشروني وجوه* (متعدد وجوه يتكون من 20 وجها من مثلثات متساوية الأضلاع) وبمجرد الجلوس داخل الكرة الخاصة بك، ستجد أن نقاط العشروني الوجوه تلامس فقط سطح الكرة. عشروني وجوه، مع جوانب مسطحة كبيرة نسبيا، لن تخادع أي شخص بالتفكير أنها منحنية. تحتاج إلى استخدام ألواح مسطحة أصغر والكثير جدا منها.

تقسيم كل حافة من العشروني الوجوه إلى النصف، وربط النقاط، يقسم كل سطح من أسطح العشروني الوجوه إلى مثلثات أصغر. إسقاط رؤوس هذه المثلثات على الكرة، يُعطيك الآن متعدد وجوه من 80 سطحا مثلثا (لم تعد الآن مثلثات متساوية الأضلاع) هذا يعطيك تقريبا أكثر إقناعا للسطح المنحني للكرة. يمكنك المواصلة على نفس المنوال، تقسيم الحواف إلى النصف وخلق المزيد من السطوح المثلثة، إلى أن يتكون السطح من مثلثات مُسطحة تكون أقرب إلى سطح منحني كما تريد.

****

الأعداد السالبة
(negative numbers)

الأعداد السالبة من السهل تخيلها، لو كنت تفكر في خط الأعداد كترمومتر عملاق والذي يتضمن درجات حرارة دون الصفر، وهذا يجعل من الجمع والطرح أمرا سهلا، عليك فقط التحرك لأعلى أو لأسفل خط الأعداد تبعا للمقدار المُحدد.



ولكن ماذا عن قواعد الضرب الصعبة؟ لماذا جُداء الموجب في السالب يعطينا سالب، وجُداء السالب في السالب يعطينا موجب؟ هنا خط الأعداد يمكن أن يساعدنا أيضا.

لنفرض أنك تقف عند النقطة 0 مُقابل للاتجاه الموجب من خط الأعداد، تراجع خطوتين للوراء وافعل هذا 4 مرات، سينتهي بك المَطاف عند النقطة (-8) وهذا يُظهر أن (-2) خطوات ضرب 4 مرات هي (-8) إذن: $(-2)\times 4=(-8)$

الآن لنفرض أنك عُدتَ عند 0 هذه المرة مُقابل للاتجاه السالب تَقَدَم خطوتين 2 إلى الأمام، وافعل ذلك 4 مرات، سينتهي بك المطاف كذلك عند (-8)، وهذا يُظهر أن جُداء خطوتين 2 من أجل (-4) مرة هو (-8) إذن: $2\times(-4)=(-8)$

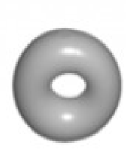
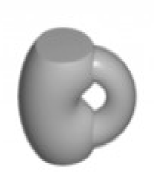
مرةً أخرى، عُد إلى 0 مُقابل للاتجاه السالب، تراجع خطوتين 2 للوراء، افعل ذلك 4 مرات، سينتهي بك المطاف عند النقطة 8. خطواتك إلى الوراء تعطيك (-2) ، مُقابلتك للاتجاه السالب تُعطيك (-4) وضع كل هذا معا يعطينا: $(-4)\times(-2)=8$

****

الزمرة الأساسية

(The fundamental group)

يشتهر علماء الطوبولوجيا باعتقادهم أن *دونات* (doughnut) وفنجان قهوة هما ذاتُ الشيء (نفس الشيء)، لأنه بالإمكان تشويه أحدهما إلى الآخر من دون تمزيق أو قطع. بعبارة أخرى، الطوبولوجيا لا تهتم بالقياسات الدقيقة للمقادير مثل الأطوال، الزوايا والمساحات. إنما بدلا من ذلك، هي تركز على الشكل الإجمالي للكائن (كائن رياضياتي)، إذ تعتبر أن كائنين هما ذاتُ الشيء طالما كان بالإمكان *إعادة- تشكيل* (morph) أحدهما إلى الآخر من دون كسره. ولكن كيف يُمكنك العمل بهذا المفهوم الغامض؟



واحدة من الأدوات الفعالة، هي ما يُدعى **الزمرة الأساسية** لشكل. خُذ الكرة كمثال. وقع نقطة A على الكرة وتأمل في جميع العُقَد التي تعبر تلك النقطة – على سبيل المثال. أنظر إلى كل المسارات التي باستطاعتك رسمها على الكره والتي تبدأ وتنتهي عند نقطتك A. نعتبر أن عقدتين اثنين مُتساويتان إذا كان باستطاعتك *إعادة- تشكيل* إحداهما إلى الأخرى من دون قطع أي منهما. بإمكانك ضم عقدتين p و q للحصول على ثالثة، ببساطة عن طريق الالتفاف أولا حول p ثم الالتفاف حول q. أيضا، إذا اجتزت عقدة في اتجاه " مع عقارب الساعة "، إذن لهذه الحركة نقيض، أو مقلوب، والذي يجتازها في اتجاه " عكس عقارب الساعة ".

هاتين الخاصيتين، أن عقدتين اثنين يُمكن ضمهما للحصول على ثالثة وأن كل عقدة لها مقلوب (كليهما مع زوج من الخصائص الأخرى)، تعني أن مجموعة من العقد (أين نعتبر أن عقدتين اثنين متساويتان إذا كان بالإمكان *إعادة-تشكيل* إحداهما إلى الأخرى) تُشكل بُنية نقية ومُستقلة تُدعى **زُمرَة**. اتضح أنه طالما أن الكائن الخاص بك **مُتصل-المسار** (يوجد مسار يربط بين أي نقطتين منه) هذه البُنية هي نفسها بغض النظر عن أي نقطة A مُستخدمة كقاعدة أو أساس لهذه العقدة الخاصة بك.

الآن على الكرة، كل عقدة يُمكن تحويلها أو نقلها إلى أي عقدة أخرى. على وجه الخصوص، كل عقدة بالإمكان تثبيتها بالعقدة البدائية (البدئية، الإبتدائية)، والتي تحافظ على مكانها وهو مجرد نقطة الأساس الخاصة بك A. الزمرة الأساسية في هذه الحالة هي أيضا **بدائية**، بعبارة أخرى أنها تتضمن عقدة واحدة فقط. هذا صحيح ليس فقط من أجل كرة مستديرة تماما، لكن أيضا من أجل كرة قدم مُفرغة من الهواء، ومن أجل أي سطح ثنائي البعد $(2D)$ مُماثل طوبولوجيا للكرة.

لكن الآن، فكر في سطح دونات، تُدعى أيضا **طارة**. في هذه الحالة، ليست جميع العقد بالإمكان تثبيتها عند نقطة لأنها قد تلتف حول ثقب الطارة أو أيضا حول بدنها. A عقدة عامة، قد تلتف حول ثقب الطارة بما مجموعه m مرة وحول البدن بما مجموعه n مرة. اِتضح أن أي عقدتين اثنين متساويتان، إذا التفت كل منهما، حول الثقب بنفس عدد المرات و حول البدن بنفس عدد المرات. الزمرة الأساسية للطارة هي نفس بُنية الزمرة التي تحصل عليها من النظر إلى زوج مُرتب من الأعداد الصحيحة(على وجه الدقة، هي نفس **الجداء المباشر** $Z \times Z$، حيث Z هو مجموعة الأعداد الصحيحة). هذا صحيح ليس فقط من أجل طارة مستديرة تماما، بل أيضا من أجل طارة غير منتظمة تماما ومُحفرة. وبالتالي فان الجداء المباشر لـ $Z \times Z$، والذي هو بُنية مفهومة جدا، يعطينا توصيفا جيدا للطارات، بغض النظر عن هندستها على وجه الدقة.

مفهوم الزمرة الأساسية هو آداة قوية في الطوبولوجيا، أين لا يمكنك استخدام قياسات دقيقة لوصف كائن ما. انه يرتبط أيضا بواحدة من أصعب المسائل في الرياضيات الحديثة: *حدسية بوانكاريه*. قد يبدو واضحا أن أي كائن مع زمرة أساسية بدائية هو طوبولوجيا، مماثل للكرة: زمرة أساسية بدائية تعني أن الكائن ليس لديه ثقوب يُمكن للعقد أن تلتف حولها وان لم يكن هناك ثقوب، فالكائن يستطيع دائما أن يتشوه إلى كرة تامة. في بدايات القرن العشرين، تساءل هنري بوانكاريه، إذا ما كان هناك حالة مُشابهة صحيحة من أجل كرة ثلاثية الأبعاد ($3D$) (والتي من الصعب علينا تصورها) ووجد أن المسألة صعبة جدا. استغرق الأمر حوالي 100عام لإثبات أن الجواب هو نعم.

****

المثلثات
(triangles)

آه المثلث المتواضع. هذا الشكل البسيط هو واحد من أول ما نتعلم دائما. لكن ربما لأنك لم تُدرك تماما مدى أهمية المثلثات.

المثلث هو مضلع ثلاثي الأضلاع، وله مجموعة متنوعة من الأصناف. بعضها له علاقة بطول أضلاع المثلث: **متساوي الأضلاع**– كل أضلاعه (وكل زواياه) لها نفس القياس. **متساوي الساقين**– له ضلعان (وزاويتان) لهما نفس القياس. **مختلف الأضلاع**– ليس له أضلاع (أو زوايا) متقايسة. الزوايا داخل المثلث مهمة أيضا. مجموع كل زواياه هو 180°. قد تجد **مثلثات حادة**– كل زواياها أقل من 90°. و**مثلثات منفرجة**– أحد زواياها أكبر من 90° وطبعا قد تجد **مثلثات قائمة الزاوية**–وهي واحدة من أهم أشكال الرياضيات الملهمة لنظرية فيثاغورث وعلم حساب المثلثات.

لكن المثلثات ليست ذات أهمية رياضياتية فقط. هي أيضا أساسية في طريقة البناء داخل بيئاتنا. سواءا الواقعية أو الافتراضية. المثلثات مُمَيزة لأنها على نحو اِستثنائي قوية. من جميع الأشكال ثنائية الأبعاد التي نستطيع أن نصنع منها دعامات مباشرة من المعدن، المثلث فقط هو **الصلب**. جميع الأشكال قد تتشوه بدفعة بسيطة إذا كان الشكل يرتكز على الزوايا (على سبيل المثال. المستطيل قد يتم دفعه أكثر

ليصبح متوازي أضلاع). لكن لا ينطبق الأمر على المثلث الموثوق به. والذي يُفسر انتشار استخدامه في الإنشاءات العظمى من أعمدة أسلاك الضغط العالي وصولا إلى الدعامات.

المثلثات مُمَيزة أيضا لأنها أبسط مضلع– هي مُقاربة شائعة لمسألة هندسية معقدة، مثل مسألة تحليل سطح مُركب. بدلا من ذلك ننجز تقريب له بواسطة شبكة من المثلثات. هذه المُقاربة تستخدم أيضا في العالم الحقيقي لتحقيق بعض الأشكال الغريبة التي نراها الآن في العمارة الحديثة، مثل الشكل المنحني لمبنى *برج 30 سانت ماري الفأس*، الذي يُعرف باسم *الجبيركين*. أو المظلة على فناء *المتحف البريطاني*



طريقة التثليث هذه، حيوية أيضا في بناء عالمنا الافتراضي. وذلك في العديد من الأشكال التي نراها في الأفلام وفي شاشات التلفاز وغيرها.(مثل تصميم الأشكال الموضحة في الصور)

****

الروافع
(levers)

أنا أخيرا أعرب عن إعجابي وتقديري بوجود رافعة. بعد الوقوع في الوحل على طريق ريفي في يوم بارد ممطر، كنت أحاول تغيير إطار العجلة حتى بالقفز على نهاية مفتاح فك عجلة الدولاب لكن لم أتمكن من زحزحة الدولاب المكسور، لكن عندما وصلت فرقة المساعدة فُكت لهم بكل سهولة، شكرا لمفك العجلة الذي كان يماثل ثلاث أضعاف حجمي. هل تملك واحدا...الحجم حقا لا يهم.

الرافعة هي حقا آداة رائعة والتي يمكن أن تُعطي حرفيا لأي واحد منا قوة عشرة رجال. يمكنك مواجهة 10 رجال وإسقاطهم على جانب أرجوحة بمجرد تطبيق $\frac{1}{10}$ (عُشر) قوتهم، طالما كنتَ أبعد مسافة 10 أضعاف من مسافة بُعدهم هُم (الرجال) بالنسبة لمركز الأرجوحة.

وهذا لأن القوى المؤثرة على الرافعة تتناسب مع مسافات بُعدهم عن نقطة الارتكاز. وبهذه الطريقة مقدار صغير من القوة المُحركة على مسافة بعيدة يمكنه تحريك حمولة كبيرة على مسافة أقل.

الروافع تعمل بجهد في كل مكان حولنا: الأرجوحة (أين تقع نقطة الارتكاز ما بين الأحمال)، في عربات اليد (أين تقع الحمولة ما بين نقطة الارتكاز والقوة) وحتى في أشغالنا اليومية (أين يتم تطبيق القوة ما بين نقطة الارتكاز والحمولة) .

أرخميدس كان أول من وصف كيفية عمل الروافع رياضياتيا وقال جملته المشهورة: " امنحني مكانا للوقوف، وسأحرك لك الأرض برافعة " وامنحني مفك دولاب عجلات طويل كفاية لأكون قادرا ربما فقط على مجرد تغيير إطار العجلة في المرة القادمة لنفسي!

****

مُعضلة السجينَين
(The prisoner's dilemma)



اِفرض أنك وصديق، قد تم إلقاء القبض عليكما في جريمة، وتم استجوابكما على انفراد أي كُلٌ على حدا. عرضت الشرطة على كليكما نفس الخيارات. بإمكانك إما الاعتراف، تجريم شريكك، أو التزام الصمت. إذا اعترفت وشريكك لم يعترف، فسيُحكم عليك بسنتين 2 في السجن (كمكافأة على كلامك)، في حين سيُحكم على شريكك بـ10 سنوات في السجن. إذا اعترف كليكما، فسيُحكم عليكما بـ8 سنوات سجن (مُخفضَة عن 10 سنوات لأن كل منكما على الأقل تكلم). إذا التزم كليكما الصمت، سيُحكم على كل واحد منكما بـ 5 سنوات سجن، على اعتبار أن الأدلة تكفي فقط لإدانتك بأقل جُرم.

كيف يجب أن تكون الإستراتيجية الخاصة بك؟ كفرد عقلاني وأناني، يجب عليك التكلم. إذا كان شريكك قد تكلم، ومنه اعترافك سيكلفك 8 سنوات بدلا من 10 سنوات. إذا لم يتكلم شريكك، فسيُحكم عليك بسنتين 2 بدلا من 5. التكلم هو إستراتيجيتك المُهيمنة، لأنها تجعلك أفضل حالا من الصمت، مهما فعل شريكك.

المُزعج أن شريكك، عقلاني وأناني مثلك تماما، وسينتهي به المطاف إلى نفس النتيجة. سيقرر كل منكما التكلم والحصول على 8 سنوات لكل واحد منكما. من المفارقات، الإستراتيجية المهيمنة عند كليكما، ستجعل كل واحد منكما أسوءُ حالا مما قد يفعله بكما التزام الصمت.

مُعضلة السجينَين هي واحدة من أشهر الألعاب في نظرية الألعاب لأنها توضح سبب ميل الناس إلى رفض التعاون عندما يكون الأفضل حالا القيام بذلك. من بين الحالات من واقع–الحياة المشابهة لهذه المعضلة هو سباق التسلح بين دولتين، أين تعمل كل دولة على الرفع من درجة تسلُحها، في الوقت الذي يكون فيه نزع السلاح الأفضل لكليهما.

****

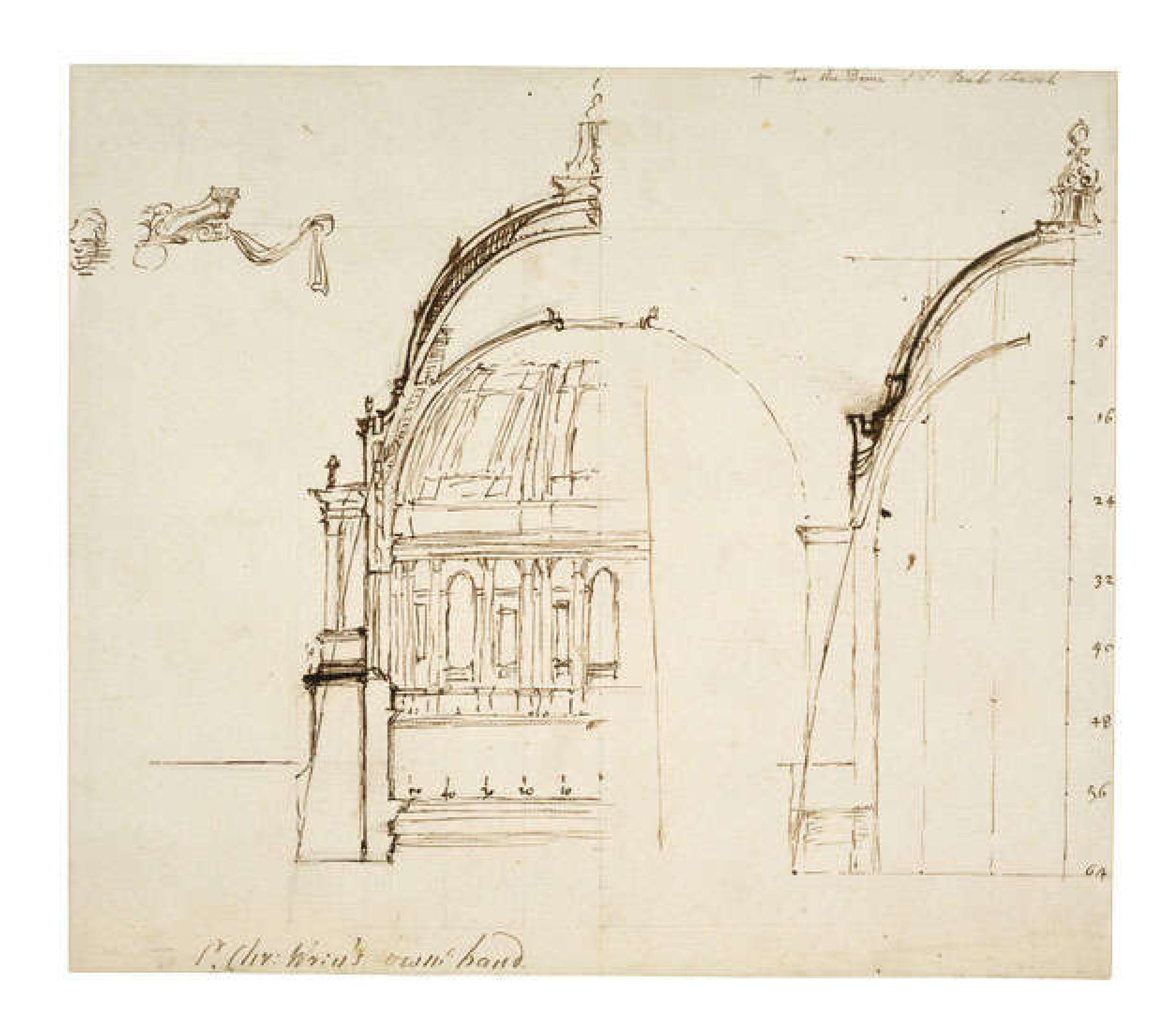
قبة كاتدرائية القديس بول
(St Paul's dome)

واحدة من معالم لندن الأكثر شعبية، قبة كاتدرائية كنيسة القديس بول، تحدق من فوق المدينة لأكثر من ثلاثة قرون. لكن الكثير من الناس لا يدركون أنها تخفي نموذجا مثيرا للاهتمام عن التفاعل بين الرياضيات والهندسة المعمارية.

بالنظر إليها من الخارج، البناء مُكلل بقبة متألقة نصف كروية، مُدَعَمة بمشكاة رائعة. لكن ما تراه من الداخل يختلف عما تراه من الخارج. خلق *السير كريستوفر رن* تصميما مُبتكرا من ثلاث قبات متداخلة: قبة خارجية نصف كروية للهيمنة على الأفق، قبة داخلية شاهقة متلائمة أكثر مع الأبعاد الداخلية للكاتدرائية، وقبة وسطى مخفية.

هذه القبة الوسطى، كانت لازمة وضرورية لتوفير الدعم الهيكلي للقبة الخارجية والمشكاة. على الرغم من أن شكل القبة الخارجية الكروي مُهم جماليا، لكنه ضعيف البنية بطبيعته ولن يكون له القدرة على تحمل

وزن المشكاة. وعلى الرغم من أن القبة الداخلية تبدو على أنها مفتوحة على المشكاة أعلاها، لكنها في الواقع داخل القبة الوسطى الذي تم تزيينه ليبدو كمشكاة.



مسودة *كريستوفر رن* لتصميم القبة الثلاثي لكاتدرائية القديس بول. والتي تُظهر بوضوح رسمه لمنحنى مكعب $y = x^3$ ، لإعطاء الشكل للقبة الوسطى، صورة من المتحف البريطاني

هذه المسودة المبكرة (عام 1960) لتصميم القبة الثلاثي، أظهرت أن *كريستوفر رن* قد استخدم منحنى رياضياتي لتحديد شكل القبة الوسطى، المنحنى المكعب $y = x^3$ تم رسمه بوضوح على محاور معلمية على التصميم. المنحنى لا يحدد شكل القبة الوسطى فقط، بل وأيضا طول وعرض الدعائم المحيطة، متمركزة بحيث تضمن استمرارية للمنحنى المكعب إلى مستوى سطح الأرض. كريستوفر رن قام بتطبيق

نظرية زميله *روبرت هوك* عن الأشكال الرياضياتية المثالية لبناء القباب والأقواس، والتي تُعد واحدة من النماذج الأولى عن العلوم الرياضياتية التي تُستخدم كجزء من عملية التصميم.

في سنة 1675 نشر *جناس القلب* الآتي:

Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum

والتي تترجم إلى "وكما يتدلى الخيط المرن، لذلك لكن معكوسا سيقف القوس الصلب". "هوك" كان قد فهم بشكل صحيح أن الضغط المُطبق عبر حبل مُعلق، مماثل للضغط في قوس ثابتة. ومنه فالشكل الطبيعي لحبل مُعلق – **سلسلي**– من شأنه أن يكون أيضا شكل خط الرفع في قوس. يحتاج القوس ليكون مستقرا أن يتضمن هذا الخط للرفع، سواءا في بدن القوس في حد ذاته أو في دعاماته. ومنه فالشكل المثالي لبناء قوس، الشكل الذي يتطلب أقل المواد، هو السلسلي.

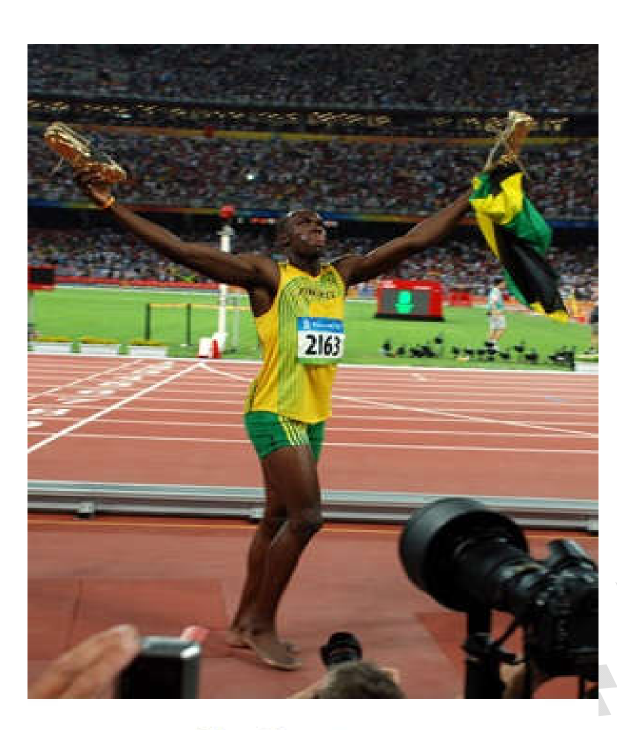
"هوك" و"كريستوفر رن" اعتقدا أن الشكل المثالي لبناء قبة يجب أن يكون **قطع مكافئ–مكعب مخروطي** يتم إنشاؤه بواسطة مناوبة دائرية لنصف منحنى مكعب $y = x^3$. توصيفهم الرياضياتي كان قريبا جدا، لكن المعادلة الصحيحة التي حددت شكل السلسلي والقبة المثالية تم اكتشافها في وقت متأخر بكثير.

تصميم القبة الثلاثي واصل التطور تدريجيا بعد هذا الرسم، باستخدام نماذج تجريبية وتأثيرات علم الاقتصاد والجماليات، اتخذ شكله النهائي. القبة الوسطى، كما شيدت أخيرا، لم تعد الشكل الهندسي المحض في المسودة. لكن من الواضح أن شكلها قد تم اشتقاقه من المفهوم الرياضياتي للمنحنى المكعب، واحد من أكثر النماذج إذهالا عن دور الرياضيات في الهندسة المعمارية.

****

الانحدار إلى المتوسط

(Regression to the mean)



يوسين بولت

يحتفل بانتصاره في سباق الـ100متر وتحقيقه لرقم قياسي عالمي جديد خلال أولمبياد بكين

في بعض الأحيان، لا يُمكنك أن تجادل لمجرد توفر الأدلة. إذا أصبحت عينة كبيرة من الأشخاص المرضى جدا أفضل حالا بعد الرقص عراة على ضوء القمر المُكتمل بدرا، فمن المؤكد أن الرقص له مفعول ما !! الأقل إثارة من ذلك، إذا حققت أفضل المدارس آداءا في البلاد نتائج سيئة طوال الوقت، فمن المؤكد أن هناك خطأ ما !! في نظام التعليم.

لكن قف لثانية، قبل القفز إلى استنتاجات، أنت في حاجة إلى استبعاد ظاهرة إحصائية تُدعى الانحدار إلى المتوسط. الفكرة أنه إذا اخترت مجموعة من القياسات لأنها متطرفة جدا، ثم قمت بانجاز نفس القياسات بعد فترة وجيزة، فمن المرجح أن تكون النتيجة أقل تطرفا.

فكر في *يوسين بولت*. إذا قمت بقياس آدائه في سباق الـ100 متر. في اليوم الموالي لتحقيقه رقم قياسي عالمي، الرقم الذي ستحصل عليه، على الغالب لن يكون رقما قياسيا عالميا آخرا، بل سيكون أبطأ نوعا ما. ذلك لأن آدائه الذي حقق به الرقم القياسي العالمي في اليوم السابق لم يكن منوطا بقدرته البدنية كُليا، بل أيضا بجميع العوامل الأخرى– مزاجه، حالة المسار، شغف الجماهير– والتي تؤثر باختلاف مقاصدها وأهدافها بشكل عشوائي. خلال ركضه في اليوم الموالي، بعض أو كل هذه العوامل، على الغالب غائبة، ومنه آداؤه سيكون أقرب إلى مُعدله الشخصي، أو المتوسط..

وبالمثل، إذا قمت بانتقاء مجموعة من الأشخاص المرضى جدا لاختبار دواء (أو رقص) عليهم، وفي قياسك التالي وجدتهم على الأرجح يشعرون بتحسن، فذلك لمجرد أن شعورهم بالمرض قد انحدر إلى المتوسط (ناهيك عن تأثير الدواء الوهمي). لا يُمكنك أن تفترض تلقائيا أنه كان بسبب الدواء. وإذا قمت

بانتقاء مجموعة من المدارس بسبب آدائهم المتميز، على الأرجح أنك سترى نتائج سيئة في المرة القادمة. لا يُمكنك بالضرورة أن تلوم الحكومة.

الانحدار إلى المتوسط، تم الإشارة إليه لأول مرة من طرف ابن عم تشارلز داروين، السير *فرانسيس غالتون*، في القرن الـ19

****

المجاميع الذكية
(Clever sums)



كيف يُمكنك أن تقوم بجمع كل الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100؟ تحصيها عبر آلة حاسبة؟ تكتب كود كمبيوتر بسيط؟ أو تبحث عن صيغة عامة لجمع الأعداد؟ تقول الأسطورة أن مُهمة جمع هذه الأعداد قد أعطيت إلى الشاب *كارل فريدريش غاوس* بواسطة مُعَلمه في المدرسة الابتدائية كعقاب عن سوء السلوك. غاوس لم يكن يملك آلة حاسبة أو كمبيوتر، لا أحد يملكها في ذلك الوقت، لكنه جاء بالإجابة الصحيحة في غضون ثوان، وفيما يلي كيف فعل ذلك.

لاحَظَ أنه يُمكن جمع الأعداد في أزواج، انطلاقا من الطرفين، أولا تجمع 1 مع 100 لتحصل على 101 ، التالي 2 مع 99 وتعطينا 101 أيضا، الشيء نفسه من أجل 3 مع 98، بالاستمرار على نفس المنوال، آخر زوج ستحصل عليه هو 50 و 51 والتي تُعطي 101 أيضا، إجمالا يوجد 50 زوج مجموعها 101. إذن الإجابة هي $50\times101=5050$. بسهوله إن كنتَ غاوس.

****

اللانـهايات القابلة للعد

(Countable infinities)



مجموعة لانهائية تدعى *قابلة للعد* إذا كان بالإمكان إحصاؤها. بعبارة أخرى، تدعى قابلة للعد إذا كان باستطاعتك وضع عناصرها على توافق واحد لواحد مع الأعداد الطبيعية 1,2,3,.... على سبيل المثال، كيس به عدد لانهائي من التفاح سيكون عدد لانهائي قابل للعد لأن (مع إعطاء مقدار لا حصر له من الوقت) باستطاعتك وسم (تمييز) التفاح 1,2,3,...الخ

نعتبر أن مجموعتين لانهائيتين قابلتين للعد A و B، لديهما نفس "*الحجم*" (أو *أصلية، كردينالية*) لأنه باستطاعتك إقران كل عنصر من A مع عنصر واحد ووحيد فقط من B. بحيث لا عناصر من كلا المجموعتين ستبقى في الأخير. هذه الفكرة تبدو منطقية، لكن لها بعض النتائج المضحكة. على سبيل المثال، الأعداد الزوجية هي لانهائية قابلة للعد لأنه باستطاعتك وصل العدد 2 إلى العدد1، والعدد 4 إلى 2، والعدد 6 إلى 3 وهكذا. لذلك إذا نظرنا إلى مُجمل الأعداد الزوجية (وليس المجموعة المنتهية فقط) سنجد أن هناك العديد منها تماما كالأعداد الطبيعية، على الرغم من أنه من البديهي أن تعتقد أنه يجب أن يكون هناك سوى نصف هذا العدد.

شيء من هذا القبيل ينطبق على الأعداد الكسرية (جميع الأرقام التي يمكن أن تُكتب على شكل كسور) يمكنك جدولتها على النحو التالي: سَجّل كل الكسور التي مجموع بسطها ومقامها 2، ثم سجل التي مجموعها يصل إلى 3، ثم 4، الخ. هذه طريقة لا تخذلك أبدا لجدولة كل الكسور، وبعد تسجيلها باستطاعتك تسميتها وفق الأعداد الطبيعية 1,2,3,....إذن هناك العديد من الأعداد الكسرية تماما كالأعداد الطبيعية. الأمر الذي يبدو كذلك غريبا بعض الشيء لأنك كنت تعتقد أنه يجب أن يكون عددهم أكثر من الأعداد الطبيعية.

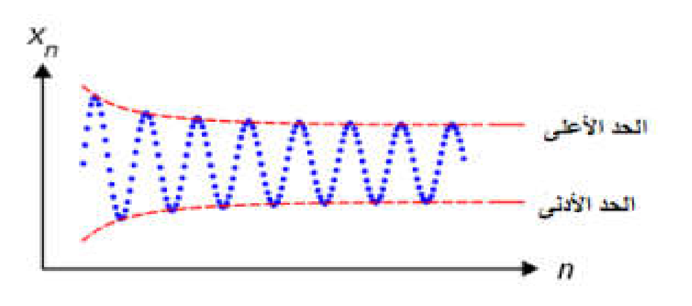
كان *غاليلو* أول من دون هذه النتائج المضحكة والتي جعلته يوقف تفكيره عن اللانهاية. لاحقا عالم الرياضيات جورج *كانتور* أعاد النظر في الفكرة. في الواقع، كانتور جاء بتسلسل هرمي كامل من

اللانهايات، واحد "أكبر" من الآخر، أين اللانهاية القابلة للعد هي الأصغر. أفكاره كانت مُثيرة للجدل في البداية، لكنها أصبحت الآن جزءا مُسلما بصحته من الرياضيات البحتة.

****

خُذ به الى أقصى حد

(Take it to the limit)



متتاليات (متسلسلات) الأعداد بالإمكان أن يكون لها نهايات، على سبيل المثال: المتتالية $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},...$ لها النهاية 0 والمتتالية $0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{4}{5},...$ لها النهاية 1.

ولكن ليست كل متتاليات الأعداد تبدو بهذا الجمال. على سبيل المثال، المتتالية $0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{4}{5},...$ تبقى تقفز صعودا ونزولا بدلا من الوصول شيئا فشيئا إلى عدد خاص بعينه، يمكننا مع ذلك رصد نوع من السلوك الحدي(النهائي) أثناء التحرك على طول المتتالية: الأعداد لا يمكن أن تصبح أكبر من 1 أو أصغر من 0، والأكثر من ذلك، بالانتقال بعيدا بما فيه الكفاية على طول المتتالية يُمكنك العثور على أعداد تقترب بالقدر الذي تشاء إلى كليهما 0 و 1 لذا كل من 0 و 1 لهما نفس الحق في أن نعتبرهما نهايتين للمتتالية. وعلى اعتبار أنهما نهايتي المتتالية، لذا ولأسباب واضحة يُدعى كل منهما كالآتي: 1 *الحد الأعلى* و 0 *الحد الأدنى*.

ولكن يمكن تحديد هذه الحدود العليا والدنيا وفق تسلسل عام $(a_n)=a_1,a_2,a_3,...$ على سبيل المثال الصورة المُوضحة أعلاه، وهنا كيف فعلنا ذلك من أجل الحد الأعلى، أولا ننظر إلى المتتالية كلها ونجد حدها الأعلى والأدنى، هذا هو أصغر عدد وهذا أكبر من كل أعداد المتتالية، ثم نقوم بقطع أول عدد في المتتالية a_1 ومرة أخرى نجد الحدود العليا والدنيا للمتتالية الجديدة (ما تبقى من المتتالية الأصلية). والتي قد تكون أصغر من الحدود العليا والدنيا السابقة (إذا كان مُساوي لقيمة a_1) ولكن ليس أكبر، ثم نقوم بقطع أول عددين ومرة أخرى نجد الحد الأعلى والأدنى.

نواصل على نفس المنوال، قطع أول ثلاثة، أربعة، خمسة ...إلى آخره من الأعداد، للحصول على الحدود العليا والدنيا للمتتالية (الموضحة باللون الأحمر في الصورة أعلاه) في هذه المتتالية كل عدد هو إما مُساوي أو أقل من العدد الذي قبله، الحد الأعلى يُعرف على كونه نهاية هذه الحدود العليا، وهو دائما موجود: في حالة تسلسل الحدود العليا إما على نمط ثابت أو مُتناقص، سيكون إما مُتقارب إلى سالب مالانهاية ($-\infty$) أو إلى بعض الحدود الأخرى المُنتهية. وقد يكون الحد الأعلى مُساويا لموجب مالانهاية ($+\infty$) إذا كان في المتتالية أعداد تتزايد بشكل عشوائي.

تحديد وتعريف الحد الأدنى يتم بطريقة مماثلة، إلا إذا نظرتم إلى تسلسل أعظم الحدود الدنيا ثم أخذتم نهايتها.

****

الأعداد المركبة (العقدية)
(Complex numbers)

حل المعادلات غالبا ما يرتبط بإعطاء الجذور التربيعية للأعداد وإذا لم تكن حذرا كفاية قد تُعطي من غير قصد جذرا تربيعا من مقدار سالب. وهذا غير مسموح به طبعا، لكن إن حبست أنفاسك وواصلت العمل، قد تستطيع في نهاية المطاف تربيع المقدار غير القانوني مرة أخرى لتصل لعدد سالب يُعتبر حل سليم تماما لمعادلتك.

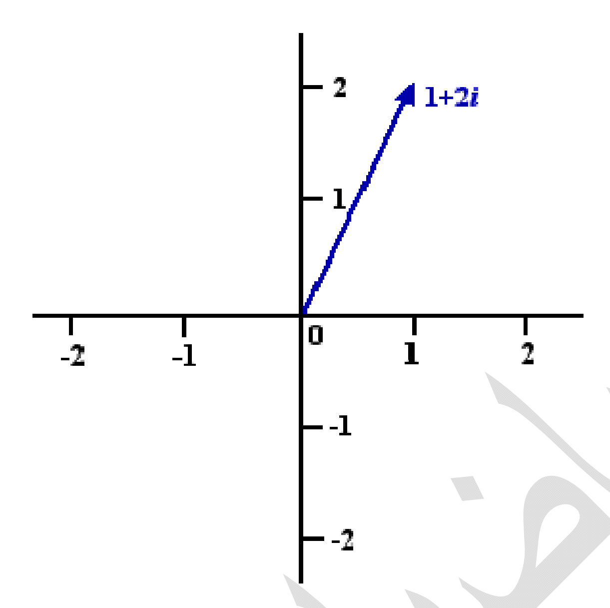
لاحظت الناس هذه الحقيقة لأول مرة في القرن 15. وبعد فترة طويلة من ذلك، في القرن 19، لاحظ "*وليام روان هاملتون*" أن الأعداد غير القانونية التي تواجههم بهذه الطريقة يُمكن أن تُكتب دائما على النحو $x+iy$ أين x و y أعداد عادية و i يُعبر عن الجذر التربيعي لـ(-1) يُمكن تمثيل العدد i وحده بهذه الطريقة مع $x=0$ و $y=1$. لأعداد وفق هذا النموذج تُدعى الأعداد المركبة.

يمكنك جمع عددين مركبين بهذه الطريقة:

$$(x+iy)+(u+iv)=(x+v)+i(y+v)$$

ويُمكنك ضرب (حساب جداء) عددين مركبين بهذه الطريقة:

$$(x+iy)(u+iv)=xu+i(xv+yu)+i^2yv=xu-yv+i(xv+yu)$$

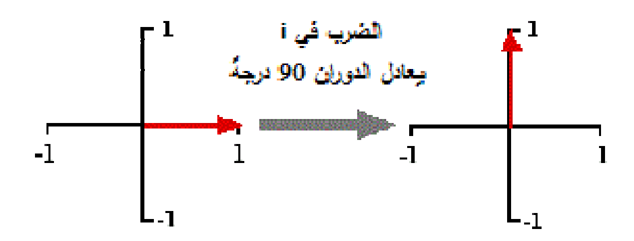


لكن كيف يمكننا تصور هذه الأعداد وجمعها وضربها؟ المُركبين x و y أعداد عادية إذن يُمكن تمثيلها كنقاط مع إحداثيات (x,y) على المستوي، والتي تعني ما تحصل عليه إذا مشيت مسافة x في الاتجاه الأفقي والمسافة y في الاتجاه الرأسي (العمودي). إذن العدد المركب $(x+u)+i(y+v)$ والذي هو مجموع $(x+iy)$ و $(u+iv)$ يتوافق مع النقطة التي تحصل عليها إذا مشيت مسافة $x+u$ في الاتجاه الأفقي ومسافة $y+v$ في الاتجاه الرأسي. الأمر منطقي.

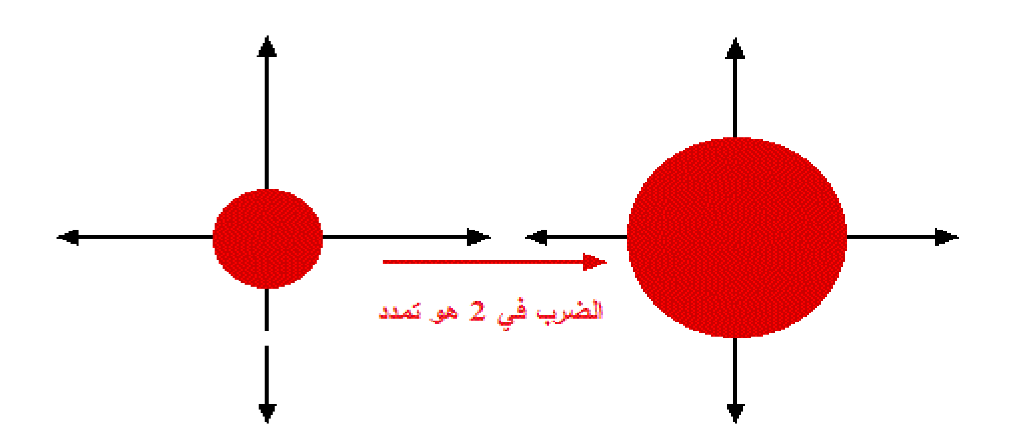
ماذا عن الضرب؟ فكر في الأعداد التي تقع على المحور الأفقي مع الإحداثيات $(x,0)$ اضربها في (-1) اقلبها على الجانب الآخر من النقطة $(0,0)$: ومنه $(1,0)$ تذهب إلى $(-1,0)$ و $(2,0)$ تذهب إلى $(-2,0)$ وهكذا. في الواقع يُمكنك التفكير في الضرب في (-1) كدوران: تقوم بتدوير المستوي بكامله بمقدار 180 درجة عن النقطة $(0,0)$.

ماذا عن الضرب في i الجذر التربيعي لـ (-1) ؟ الضرب مرتين في i يُماثل الضرب في (-1). إذن إذا كان هذا الأخير (الضرب في (-1)) يوافق الدوران بمقدار 180 درجة، فالمذكور أولا (الضرب مرتين في i) يوافق الدوران بمقدار 90 درجة. وهذا يعمل. جرب ضرب أي عدد مركب، ولنقل $2+i5$ في i وسوف ترى

أن النتيجة توافق النقطة التي تحصل عليها عن طريق الدوران بمقدار 90 درجة (عكس عقارب الساعة) عن $(0,0)$.



وماذا عن الضرب ليس فقط في i ولكن في عدد مركب أصعب $u+iv$؟ حسنا، الضرب في عدد عادي موجب توافق تمديد أو تقليص المستوى: الضرب في 2 تأخذ النقطة (x, y) إلى $(2x, 2y)$ والتي تبتعد عن $(0,0)$ والضرب في $\frac{1}{2}$ يأخذها إلى $\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$ والتي تقترب من $(0,0)$ تقليص.



ويتبين أن الضرب في عدد مركب $u+iv$ يتوافق مع مزيج من الدوران والتمدد/ التقلص. على سبيل المثال، الضرب في $(-1+1.732i)$ هو دوران بمقدار 120 درجة يليه التمدد بمعامل 2. إذن الأعداد المركبة ليست مجرد نسيج غريب من الخيال المُصمم لمساعدتك في حل المعادلات، بل لها وجود هندسي في حد ذاتها.

****

قوانين نيوتن للحركة

(Newton's laws of motion)



في الآونة الأخيرة، قمنا باستكشاف الكثير في العالم الغامض من فيزياء الكم، إذن بالعودة إلى "الأرض" نعتقد أننا سنعيد تذكيرك بالفيزياء الكلاسيكية القديمة الجيدة.



مضمار لندن للدراجات، والذي تم تصميم مساره لتحقيق سرعات قصوى باستخدام قوانين نيوتن للحركة

***قانون نيوتن الأول** :جسم في حالة سكون سيبقى في حالة سكون ما لم تؤثر عليه قوة خارجية غير متوازنة. جسم في حالة حركة سيبقى في حالة حركة ما لم تؤثر عليه قوة خارجية غير متوازنة.*

يُدعى هذا أيضا قانون القصور الذاتي ولا يحتاج للكثير من الشرح. لا يوجد جسم ثابت يبدأ بالحركة من تلقاء نفسه من دون وجود قوة تم تطبيقها عليه. والسبب لما نلاحظه – من خلال تجاربنا اليومية– حول ميل الأجسام المتحركة إلى التباطؤ ما لم يتم دعمها بواسطة شيء ما، راجع إلى عوامل كالاحتكاك ومقاومة الهواء.

قانون نيوتن الثاني: *تسارع (a) جسم ما، يتوازى ويتناسب مع القوة الصافية F المؤثرة عليه. العلاقة الدقيقة هي F=ma، أين m هي كتلة الجسم.*

في هذه المعادلة كل من F و a على حد سواء هي عبارة عن مُتجهات (أشعة) مع اتجاه ومقدار.

قانون نيوتن الثالث *:عندما يبذل جسمان اثنان قوة، كل منهما على الآخر، القوتان متساويتان في المقدار، لكن متعاكستين في الاتجاه. لكل فعل هناك رد فعل مُساوي له في المقدار ومُعاكس له في الاتجاه.*

ومنه، إذا قُمتَ بركل كرة بقدمك، فالكرة قد بذلت قوة مُساوية ومعاكسة على قدمك.

قوانين الحركة الثلاثة، تم نشرها لأول مرة سنة 1687 في عمل نيوتن الشهير *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* والذي تُرجم كالآتي ***الأصول الرياضية للفلسفة الطبيعية.***
قانون الجذب العام لنيوتن والتقنيات الرياضية التي تُدعى الآن حساب التفاضل والتكامل، نُشرت أيضا في كتاب الأصول الرياضية، جنبا إلى جنب مع قوانين الحركة، الأمر الذي أعطى أول وصف شامل للعمليات الفيزيائية التي نلاحظها في حياتنا اليومية. تبين فيما بعد أن القوانين غير متماسكة عندما ننظر إلى العالم وفق مستويات صغيرة جدا (أين تسيطر ميكانيكا الكم) أو في حالة الأجسام التي تتحرك بسرعة عالية جدا أو عندما تكون هناك حقول جاذبية قوية جدا. مع ذلك، قوانين نيوتن مازالت تعطينا تقريبا جيدا للفيزياء التي نلاحظها في حياتنا العادية.

****

الجنيه المفقود
(The missing pound)



هنا معضلة معروفة: لنفرض أنني بحاجة لشراء كتاب من متجر يكلف £7، وليس لدي أي نقود، لذلك سأقترض £5 من أخي و £5 من أختي. سأشتري الكتاب وأحصل على £3 صرافة (باقي). أرجع £1 لكل من أخي وأختي وأحتفظ بالباقي £1.

أنا الآن أدين بـ £4 لكل منهما ولدي £1، ما يعطينا £9 في المجموع. لكنني اقترضت £10. أين هو الجنيه المفقود؟

الجواب هو أن £10 هي مجرد ذر رماد في العيون. ليس هناك أي سبب يجعل من المال الذي أدين به بعد إتمام المعاملة والمال الذي لا أزال أملكه مجموعه £10. بدلا من ذلك، الفرق بين المال الذي أدين به ومال الصرافة يجب أن يعطينا سعر الكتاب، والذي يساوي £7. إرجاع جنيه لكل من أخي وأختي هو مجرد إعادة تقسيم للمبلغ. المال الذي لا أزال أدين به انخفض إلى £8 والمال الذي لا أزال أملكه هو £1. بدلا من £10 – £3 = £7، الآن لدينا £8 – £1 = £7. اللغز تم حله.

رمز الجنيه الإسترليني

****

الحساب النمطي
(Modular arithmetic)

أنت تستخدم الحساب النمطي مرات عديدة كل يوم عند التفكير في الوقت. تخيل، على سبيل المثال، أنك تسير في رحلة قطار على الساعة 11 مساءا تنتهي بعد ثلاث ساعات. متى ستصل؟ ليس عند $11+3=14$ تماما، لكن عند 2 تماما في الصباح. هذا لأن، على مدار 12 ساعة، عليك أن تبدأ العد من البداية مرة أخرى بعد أن تصل إلى 12. (على مدار 24 ساعة، عليك أن تبدأ من جديد بعد وصولك إلى 24) إذن على مدار 12 ساعة لديك



$$1 = 9 + 4$$

$$2 = 7 + 7$$

$$5 = 12 + 5$$

وهكذا. وعندما تطرح ساعات، افعل نفس الشيء لكن إلى الوراء

$$9 = 7 - 4$$

$$2 = 11 - 1$$

$$6 = 12 - 6$$

يمكنك أن تلعب نفس اللعبة باستخدام أرقام أخرى، بصرف النظر عن 12 و 24، لتحديد دورتك، على سبيل المثال، في الحساب النمطي" *مودولو* "5 لديك

$$1 = 2 + 4$$

$$2 = 4 + 3$$

$$2 = 4 - 1$$

$$3 = 5 - 3$$

هذه المجاميع قد تكون مُضجرة قليلا لانجازها إذا ما كنت تعتمد على أصابعك لحسابها، ولكن لحسن الحظ هناك طريقة عامة. دعنا نقل أنك تنجز حساب" مودولو" لبعض الأعداد الطبيعية p وتبحث في بعض الأعداد الطبيعية الأخرى x. لإيجاد قيمة x مودولو p (قيمة x على مدار p من الساعات) أحسب الباقي عندما تقسم x على p : وهذه هي نتيجتك.

هذا أيضا صالح عندما يكون x سالب (مع الإشارة أن الباقي يُعَرف دائما على أنه موجب) على سبيل المثال، لأجل $p = 12$ و $x = (-3)$ لدينا

$$9 + 12 \times (1-) = (3-)$$

إذن الباقي هو 9. وبالتالي (-3)"مودولو"12 تساوي 9. (إذا كنت تستخدم دالة مودولو في بعض لغات الكمبيوتر فعليك أن تكون حذرا قليلا خلالها، كإرجاع قيم مختلفة للأعداد السالبة). إذا أردت جمع أو طرح عددين "مودولو" عدد طبيعي ما p ببساطة أنجز النتيجة، ادعوها x في الحساب العادي ومن ثَمَ جد

قيمة x مودولو p . هناك وبوضوح أمر دوري جدا حول الحساب النمطي. أيا كان العدد p المُحدد في الحساب الخاص بك. يمكنك التفكير فيه كإحصاء إلى الأمام أوالى الخلف في ساعة مع p من الساعات. لوضع هذا في اللغة التقنية للرياضيات، الحساب النمطي مودولو p يعطيك مجموعة دورية من ترتيب p . .

****

نظرية آرو

(Arrow's theorem)



هل هناك نظام تصويت مثالي؟ في سنة 1950 الخبير الاقتصادي *كينيث آرو* سأل نفسه هذا السؤال ووجد أن الجواب: لا، على الأقل في الإطار الذي كان يتصوره.


كينيث آرو

كينيث حدد نظام التصويت كالآتي: هناك قطاع من السكان الناخبين، كل واحد منهم يأتي مع ترتيب أفضلية للمترشحين. نظام التصويت يأخذ هذه الملايين من ترتيبات الأفضلية كمُدخل وبواسطة بعض الأساليب، سيُرجع ترتيب وحيد للمترشحين كمُخرج. يمكن بعد ذلك تشكيل السلطة الحاكمة (الحكومة) على أساس هذا الترتيب الوحيد.

لجعل أي معنى ديمقراطي لنظام التصويت، كينيث ألزمَه بأن يُلبي كل من الآتي، الشروط الأساسية:

1. النظام يجب أن يعكس رغبات أكثر من مجرد فرد واحد، وبالتالي ليس هناك دكتاتور.

2. إذا كان كل الناخبين يفضلون المترشح x على المترشح y، إذن ينبغي أن يأتي x أعلى من y في النتيجة النهائية، هذا الشرط يُدعى أحيانا *الإجماع*.
3. نظام التصويت يجب أن يُرجع دائما وبالضبط وبشكل واضح نقي ترتيب نهائي واحد، هذا الشرط يُعرف باسم *العُموم* أو *الكُلية*.

أضاف أيضا شرطا رابعا، أكثر دهاءا نوعا ما.

4. في النتيجة النهائية، إذا احتل مُرشح مرتبة أعلى من آخر، ولنقل x أعلى من y، يجب أن نعتمد فقط على كيفية تصنيف الناخبين لـ x مقارنة بـ y، ولا يجب أن نعتمد على كيفية تصنيفهم لواحد من الاثنين مُقارنة بالمترشح الثالث z. آرو يدعو هذا *استقلال البدائل غير المُتصلة*.

آرو أثبت رياضياتيا أنه إذا كان هناك ثلاثة مترشحين أو أكثر واثنين أو أكثر من الناخبين، لا يوجد نظام تصويت يعتمد على أخذ ترتيب الأفضلية لدى الناخبين كمدخل ويُرجع ترتيب وحيد كمخرج يُلبي كل الشروط الأربعة. نظريته والتي سُميت *نظرية آرو للاستحالة* ساعدت على حصده سنة 1972 لجائزة نوبل في الاقتصاد.

****

حاول أن تَحل
(Shake to solve)



افرض أن لديك $n+1$ شخص في غرفة، وكل شخص يصافح شخص آخر مرة، كم هو مجموع عدد المصافحات والتي ستتحصل عليها في الأخير؟

أول شخص يتصافح مع n من الأشخاص غيره، الشخص الثاني يتصافح مع $n-1$ الأشخاص المُتبقين، الشخص الثالث يتصافح مع $n-2$ الأشخاص المُتبقين، وهكذا دواليكَ، وهذا يعطينا المجموع الآتي: $n+(n-1)+(n-2)+...+2+1$ مُصافحة.

لكن بإمكاننا النظر إلى المسألة بطريقة أخرى، كل شخص يتصافح مع n آخر ويوجد $n+1$ شخص، تعطينا $n.(n+1)$ مُصافحة ولكن هذه الطريقة، تُحصي كل مُصافحة مرتين، إذن نحتاج لقسمتها على 2 لتُعطينا المجموع الآتي:

$$\frac{n.(n+1)}{2}$$

بوضع هذين التفسيرين معا، سنحصل على صيغة مجموع أول n عدد صحيح، وأثبتنا أن هذا صحيح

$$n+(n-1)+(n-2)+...+2+1=\frac{n.(n+1)}{2}$$

الرياضيات بالإمكان أن تصبح سهلة جدا!

****

أسرار الأعداد
(Number mysteries)

نظرية الأعداد تُشتهر بالمسائل التي بإمكان أي شخص فهمها ومن السهل التعبير عنها، لكنها صعبة الإثبات. وهنا البعض من المُفضلة لدينا:

حدسية غولدباخ

دُعيت حدسية غولدباخ بعد ما قام به عالم الرياضيات **كريستيان غولدباخ** من صياغتها في منتصف القرن الثامن عشر، وتنص على أن أي عدد طبيعي زوجي أكبر من 2 يُمكن كتابته على شكل مجموع عددين أوليين.

إنه من السهل ملاحظة أن هذا صحيح بالنسبة لأول بضعة أعداد زوجية أكبر من 2:

$4 = 2 + 2$

$6 = 3 + 3$

$8 = 3 + 5$

$10 = 3 + 7 = 5 + 5$



ليونارد أويلر (1707–1783) توافق مع كريستيان غولدباخ حول الحدسية

هذا يبدو بسيطا جدا مما قد يُغريك للمحاولة لإثبات ذلك بنفسك – وأن تكون مع رفقة جيدة مثل بعض ألمع عقول الرياضيات والذين قاموا بالتمحيص جيدا وبعيدا في الحدسية منذ الإعلان عنها لأول مرة. لكن دون نجاح حتى الآن. أقرب نتيجة تم إثباتها، في 1995، تقول أن كل عدد زوجي هو مجموع ستة (06) أعداد أولية على الأكثر

هناك وضعية مُماثلة، تدعى حدسية غولدباخ الضعيفة، والتي تقول أن كل عدد طبيعي فردي أكبر من 5 هو مجموع ثلاث أعداد أولية. مرة أخرى يمكننا ملاحظة أن هذا صحيح بالنسبة لأول بضعة أعداد فردية أكبر من 5:

$7 = 2 + 2 + 3$

$11 = 3 + 3 + 5$

$13 = 3 + 5 + 5$

$17 = 5 + 5 + 7$

هذه الوضعية تدعى "الضعيفة" لأنها متى ما تمكن أحد ما من إثبات حدسية غولدباخ العادية "القوية"، الضعيفة بالإمكان استخلاصها منها.

في 1938 "*نيلز بيبيج*" أظهر أن حدسية غولدباخ (القوية) صحيحة من أجل الأعداد الزوجية بما يصل إلى 10^5. آخر نتيجة، مؤكدة باستخدام بحث الكمبيوتر، تُظهر أن هذا صحيح من أجل أعداد زوجية بما يصل إلى 4×10^{18} وهذا عدد هائل، لكن بالنسبة لعلماء الرياضيات ليس جيدا بما فيه الكفاية. فقط إثبات عام سيفعل.

الأعداد المثالية

العدد المثالي هو عدد مُساوي لمجموع كل قواسمه (باستثناء العدد نفسه)، على سبيل المثال، 6 عدد مثالي لأن قواسمه (باستثناء 6) هي 3,2,1 ولأن

$$6 = 1 + 2 + 3$$

العدد المثالي التالي هو 28، والذي لديه قواسم هي 14,7,4,2,1 ولأن

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

الثلاث أعداد مثالية التالية هي 496 ، 8128 ، 33.550.336



إقليدس مُصَوَّر مع فرجار في لوحة رافائيل مدرسة أثينا

الفجوات بين الأعداد المثالية واسعة بقدر ما أن اكتشافها مُضني، الأربعة أعداد الأولى يبدو أنها كانت معروفة لدى الإغريق، الخامس والسادس لم تُكتب بشكل واضح إلى غاية القرن15 ولحقها السابع في القرن16. اليوم نحن نعرف 48 عدد مثالي، الأكبر منها يتضمن أكثر من 34 مليون رقم. كل هذه الـ 48 زوجية. وهذا يُثير سؤالين:

- هل هناك عدد لا نهائي من الأعداد المثالية ؟
- هل هنالك أي عدد فردي مثالي ؟

والى الآن لا أحد استطاع الإجابة على هذه الأسئلة مع إثبات قاطع.

الشيء الوحيد الذي كان معروفا بالفعل عند عالم الرياضيات الإغريقي **إقليدس** لأكثر من2000 سنة مضت أنه إذا كان p عدد أوليا و 2^p-1 هو أيضا عدد أولي، إذن $2^{p-1}(2^p-1)$ وعدد زوجي مثالي. على سبيل المثال:

$$2^1(2^2-1)=6$$
$$2^2(2^3-1)=28$$

في القرن 18 عالم الرياضيات **ليونارد أويلر** أثبت أن كل عدد زوجي مثالي هو من هذا النموذج. أكبر عدد مثالي معروف، هو العدد الذي به أكثر من 34 مليون رقم وهو

$$2^{57885160}\times(2^{57885161}-1)$$

هذا يقودنا مباشرة إلى سر عددنا التالي

أعداد ميرسين الأولية


مارين ميرسين(1588-1648)

الأعداد الأولية هي تلك الأعداد التي لا تقبل القسمة إلا على نفسها أو 1. بعضها من البداية $2,3,5,7,11$ وخلافا للأعداد المثالية نحن نعلم أن هناك عدد لا نهائي منها. إثبات هذا أتى بواسطة إقليدس، مع ذلك لا توجد وصفة سهله توَلد كل الأعداد الأولية. هنا أين أعداد من النموذج 2^p-1 أين p أولي، تصبح فعالة، وتدعى *أعداد ميرسين الأولية*، بعد أن درسها الراهب الفرنسي **مارين ميرسين** (1588– 1648) ولديها فرصة جيدة لتكون أولية في حد ذاتها.

والسؤال هو، هل يوجد عدد لا نهائي من *أعداد ميرسين الأولية*؟ علماء الرياضيات يعتقدون أنه على الأرجح يوجد، لكن مرة أخرى لا أحد قادر بَعد على إثبات هذه الحدسية.

تم العثور على ما مجموعه 48 عددا من أعداد ميرسين الأولية حتى الآن، الأكبر أُكتشف في *جانفي 2013* ويُقَدر بالآتي

$$2^{57885161} - 1$$

وهذا يوافق العدد 48 المعروف من الأعداد المثالية. البحث عن أكبر وأكبر أعداد ميرسين الأولية يستمر، وكذلك البحث عن دليل قاطع على أنها لانهائية.

وهناك المزيد

سر مُفضل آخر في نظرية الأعداد هو حدسية التوأم الأولي. التي تنص على أن هناك عدد لانهائي من أزواج الأعداد الأولية التي حاصل طرحها هو 2. مؤخرا هناك تقدم في هذا. سر تم حله بعد أكثر من 350 سنه من الجُهد، هو *نظرية فيرما الأخيرة*.

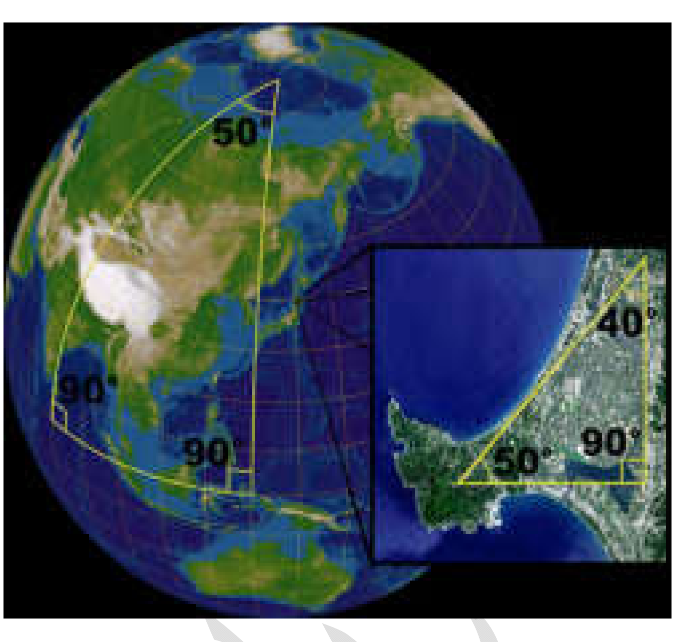
****

ليست دائما 180
(Not always 180)

منذ أكثر من 2000 سنة، جاء عالم الرياضيات اليوناني إقليدس بقائمة من خمسة (05) مسلمات، اعتقد حينها أن الهندسة مبنية عليها. واحدة منها، الخامسة، كانت تعادل حالة جميعنا على دراية بها: أن مجموع الزوايا في مثلث يساوي 180 درجة. ومع ذلك، فإن هذه المسلمة لا تبدو واضحة مثل الأربعة الأخرى على قائمة إقليدس، لذلك حاول علماء الرياضيات إثباتها من الأربع مسلمات الأخرى: لإظهار أن الهندسة التي رضخت للمسلمات الأربعة الأولى من شأنها أن ترضخ بالضرورة للخامسة. استمر نضالهم لعدة قرون، ولكن في النهاية فشلوا. ووجدوا أمثلة على هندسات لا ترضخ للمسلمة الخامسة.

الهندسة الكروية

في الهندسة الكروية، الفكرة الإقليدية عن الخط أصبحت دائرة عظمى، والتي تعني، دائرة بنصف قطر أعظمي يمتد حول أضخم جزء من الكرة. منذ فترة ليست بالبعيدة، كان صحيحا أن مجموع الزوايا في

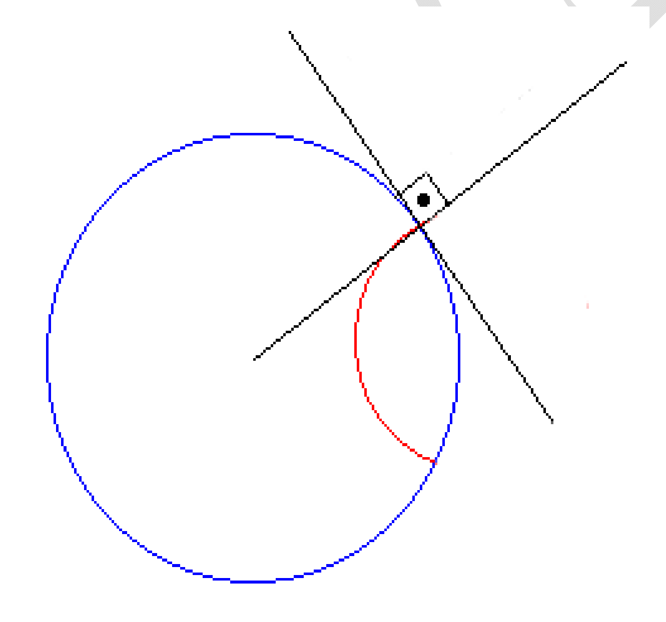


مثلث هي دائما 180 درجة، المثلثات الصغيرة جدا، مجموع زواياها يتجاوز الـ180 درجة بمقدار ضئيل جدا. (لأنه من وجهة نظر مثلث صغير جدا، سطح الكرة يبدو مسطح تقريبا) المثلثات الكبيرة، لها مجموع زوايا أكبر بكثير من 180 درجة

شيء واحد مسلي، حول طول الوقت الذي استغرقه الإنسان لاكتشاف الهندسة الكروية، هو أن الهندسة في حد ذاتها اكتسبناها من على سطح الأرض! لكننا لم ننتبه لهذا قط، لأننا ضئيلون جدا مقارنة بحجم الأرض، بحيث إذا رسمنا مثلث على أرض الواقع، وقمنا بقياس زواياه، المقدار الذي به يكون مجموع الزوايا يفوق 180 درجة طفيف جدا. مما لا نستطيع الكشف عنه.

ولكن هناك هندسة أخرى أخذت الأمور في الاتجاه الآخر:

الهندسة الزائدية (القطعية)



الهندسة القطعية، ليس من السهل تصورها كما الهندسة الكروية، لأنه لا يمكن تمثيلها على غرار الإقليدية في فضاء ثلاثي الأبعاد دون تحريف (تشوه). طريقة واحدة لتصورها تدعى " قرص بوانكاريه ".

خذ قرص مستدير ، مثل الموضح بالدائرة الزرقاء في الشكل على اليسار ، وتخيل معيشة نملة في داخلها. في الهندسة الإقليدية أقصر مسار بين نقطتين داخل هذا القرص سيمثل بخط مستقيم. في الهندسة الزائدية المسافات يتم قياسها بطريقة مختلفة، إذن أقصر مسار لم يعد على طول الخط المستقيم الإقليدي ولكن على طول قوس الدائرة

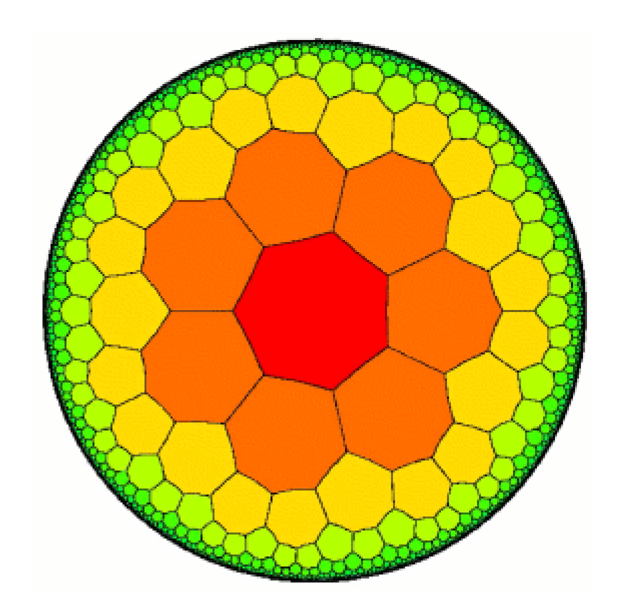
التي تلاقي حدود القرص بزوايا قائمة، مثل ما هو مبين باللون الأحمر في الشكل. ومن شأن النملة القطعية تجربة مسار الخط المستقيم كالتفاف – إنها تفضل أن تتحرك على طول قوس من هذه الدائرة –

المثلث القطعي، الذي أضلاعه هي أقواس من هذه الأنصاف، مجموع زواياه أقل من 180 درجة. جميع الأشكال باللون الأسود والأبيض في الشكل أدناه هي مثلثات قطعية (زائدية).



من نتائج هذا القياس القطعي الجديد، هو أن حدود دائرة القرص تبدو بعيدة جدا من وجهة نظر النملة القطعية. وذلك لأن القياس يشوه المسافات فيما يتعلق بالهندسة الإقليدية المألوفة لدينا. المسارات التي تبدو بنفس الطول في القياسات الإقليدية تكون أطول في القياسات القطعية، أقرب القياسات نجدها عند حدود الدائرة.

الشكل أدناه يبين تبليط المستوى القطعي بواسطة أشكال سباعية منتظمة (heptagons) وبسبب القياسات المشوهة، تبدو الأشكال (heptagons) جميعها بنفس الحجم في القياس القطعي، وكما نرى فإن النملة بحاجة إلى اجتياز عدد لانهائي منها للوصول إلى حدود الدائرة – إنها بعيدة جدا!!!!–



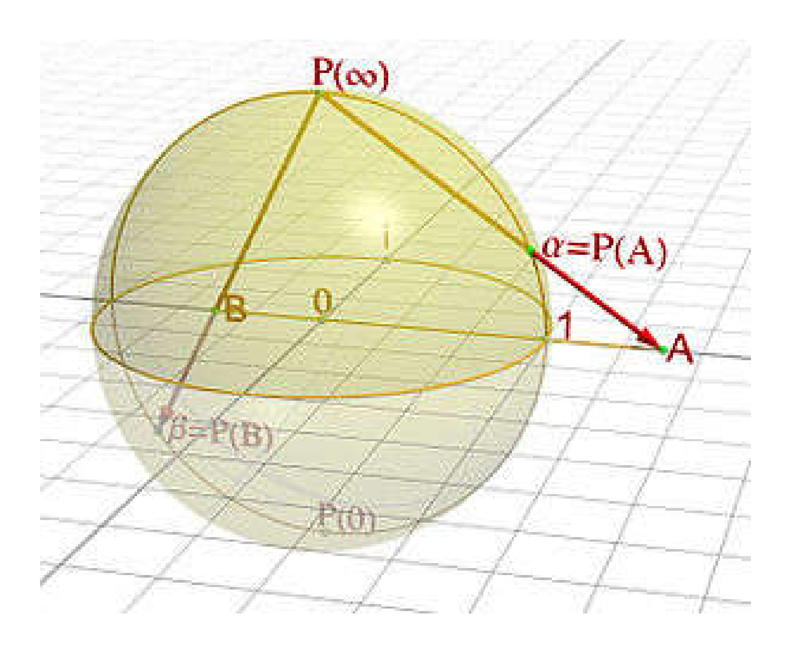
الهندسة القطعية قد تبدو وكأنها بناء رياضياتي خيالي لكن لها استخدامات من واقع الحياة. عندما طور آينشتاين نظريته الخاصة في النسبية في عام 1905 وجد أن تماثلات الهندسة القطعية كانت بالضبط ما كان يحتاجه لصياغة النظرية. ويعتقد علماء الرياضيات اليوم أن الهندسة القطعية قد تساعد على فهم الشبكات الكبيرة مثل الفايسبوك أو الإنترنت.

****

مجال ريمان
(The Riemann sphere)

إذا كنت تمشي في أنحاء مستوي ثنائي الأبعاد، يمكنك الاستمرار بالمشي إلى أجل غير مُسمى في كل الاتجاهات. يمكنك القول جازما، وفق حدسك، أن هناك مالانهاية في جميع أنحاء حافة المستوي، لكن بطبيعة الحال لا يمكنك أبدا الوصول أو حتى رؤية تلك الحافة. لكن لا يزال بإمكانك تخيل ما قد يحدث إذا قمت بكمش (من الانكماش) أو تقليص تلك الحافة–اللانهائية إلى نقطة. ربما قد يكون هذا على نحو ما، مثل تشديد الرباط على طوق حقيبة قماش، عندما تشُد الرباط، الحقيبة تُغلق وتصبح مُشابهة لمجال مُشوه.

هناك طريقة لجعل هذا الحدس دقيقا.



تخيل كرة ومُستوي يشمل خط استوائها. من أجل أي نقطة P على هذا المستوى الاستوائي، ارسم خط مستقيم يصلها بالقطب الشمالي للكرة. هذا الخط المستقيم سيقطع الكرة عند بعض النقاط. إذا كانت P خارج الكرة، سيقطع النصف الشمالي للكرة. إذا كانت P داخل الكرة سيقطع الخط النصف الجنوبي للكرة. وإذا كانت P على الكرة، فسيقطع في الواقع خط الاستواء، وستكون هي ذاتها (الكرة) نقطة التقاطع. هذه الطريقة في ربط (وصل) كل نقطة في المستوي بنقطة واحدة بالضبط على الكرة تُدعى *الإسقاط الكروي*.

من السهل أن نرى أن الأبعد خارجا، من على المستوي، نقطتك P، أقرب صورة مُسقَطة لها على الكرة هي عند القطب الشمالي. لكن ولا نقطة على المستوي إسقاطها عند القطب الشمالي في حد ذاته. القطب الشمالي لا يزال مُتاحا وكنتيجة لتسلسل انتقال النقاط نحو المالانهاية على المستوي، إسقاطاتها تنتقل نحو القطب الشمالي على الكرة. ومنه فأنت تُصرح الآن أن اللانهاية هي مجرد نقطة (تعادل الرباط المشدود) إسقاطها هو القطب الشمالي للكرة.

ما تحصل علية هو استمرارية التوافق واحد–إلى–واحد بين المستوي الخاص بك واللانهاية والكرة. الإثنان يمكن أن نعتبرهما واحدا ونفس الشيء. المستوي مع نقطة مُلحقة عند المالانهاية يُدعى *مجال ريمان* بعد القرن الـ18 نسبة إلى عالم الرياضيات *برنهارد ريمان* _ بالمعنى الدقيق للكلمة مجال ريمان هو مستوي مركب مع مُلحقة عند اللانهاية –

هذا مفيد بشكل لا يُصدق، على الغالب أنك على دراية بالدوال التي تأخذ خط الأعداد إلى نفسه. على سبيل المثال $f(x)=\frac{1}{x}$ تأخذ العدد x من خط الأعداد كمدخل ويعود $\frac{1}{x}$ كمخرج. لسوء الحظ الدالة غير مُعرفة عند $x=0$ لأن القسمة على 0 غير مسموح بها. لكن، كلما اقتربت قيمة x أكثر وأكثر إلى 0، $f(x)$ تقترب أكثر وأكثر إلى موجب مالانهاية $(+\infty)$ إذا كنت قادما من الجانب الموجب، أو سالب مالانهاية $(-\infty)$إذا كنت قادما من الجانب السالب. إذا استطعت معالجة موجب وسالب مالانهاية باعتبارهما مقدارا واحدا ونفس النقطة الواحدة، إذن الدالة يمكن تعريفها عند $x=0$ وستكون قد تصرفت

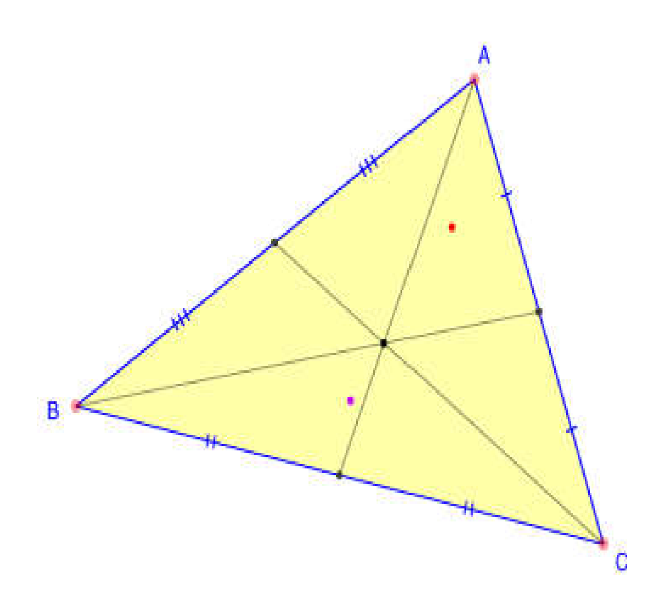
بشكل جيد تماما هنا. يمكنك أيضا تعريف الدوال التي تأخذ المستوي إلى نفسه (الدالة المركبة $f(z)=\frac{1}{z}$ كمثال) ومرة أخرى قد لا تكون مُعرفة عند كل نقطة لأن لديك القسمة على 0. مع ذلك، بمعالجة اللانهاية كنقطة ذات خصوصية من المستوي والنظر إلى كل شيء باعتباره مجال قد ينتهي بك المطاف مع دالة مُروضَة بشكل تام وتصرفها حسن في كل النواحي. الكثير من التحليل المركب، دراسة الدوال المركبة، يتم انجازها على مجال ريمان بدلا من المستوي المركب.

****

وسط المثلث

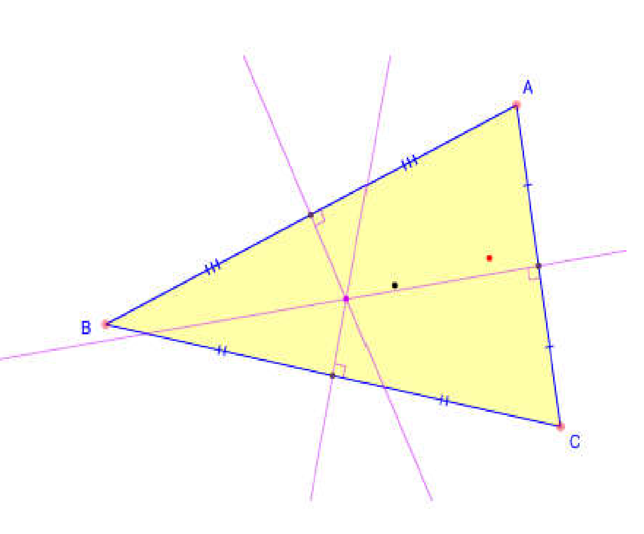
(Triangle central)

كيف توازن بين أجزاء مثلث من الكرتون بواسطة قلم رصاص؟ التجربة والخطأ هي طريقة من الطرق. لكن الرياضيات يُمكن أن توفر عنك الكثير من المتاعب. خُذ قلم رصاص ومسطرة واربط منتصف كل ضلع بالرأس المقابل له. ستجد أن النقاط الثلاثة تتقاطع في نقطة وحيدة، والتي تقع بالضبط عند ثُلث المسافة، من نقطة المنتصف من كل ضلع إلى الرأس المقابل له. هذه النقطة، تُدعى *النقطة المركزية*، هي مركز ثقل المثلث.



النقطة المركزية لمثلث

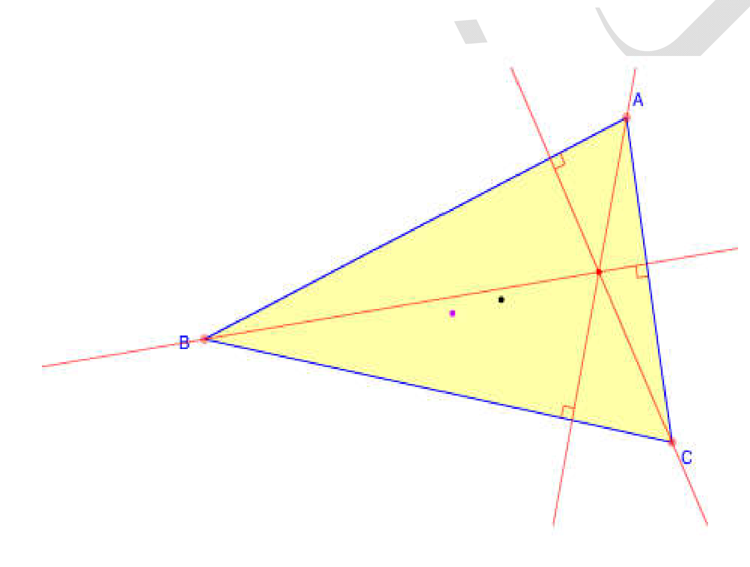
إذا كان المثلث مصنوعا من مادة متماثلة، أي لا يوجد به أجزاء هي أثقل من أخرى، فالنقطة المركزية هي النقطة الوحيدة التي يُمكنك من خلالها تحقيق اتزان المثلث من دون أن ينقلب. المثير للدهشة، النقطة المركزية هي أيضا مركز ثقل المثلث إذا كانت كتلته مُرتكزة فقط عند رؤوسه، ومُقسمة بالتساوي فيما بينها.



المركز المحيطي لمثلث

بدلا عن رسم خط من منتصف ضلع إلى الزاوية المقابلة له، يمكنك أيضا رسم الخط الذي يمر عبر المنتصف لكن يُشكل زاوية قائمة مع الضلع الذي ينتمي إليه ذاك المنتصف. إذا أنجزت هذا مع كل ضلع، ستحصل أيضا على ثلاثة خطوط، تلتقي أيضا عند نقطة وحيدة، تُدعى *المركز المحيطي* للمثلث. إذا رَسَمت الآن دائرة تمُر خلال أحد رؤوس المثلث مُتخذا من المركز المحيطي مركزا لها، ستجد أن الرأسين الآخرين للمثلث ينتميان إلى الدائرة أيضا! المركز المحيطي للمثلث هو أيضا مركز الدائرة الوحيدة التي تشمل الرؤوس الثلاثة للمثلث. لكنه لا يستوجب أن يقع داخل المثلث– في الواقع، يقع داخل المثلث فقط في حالة ما إذا كانت جميع زوايا المثلث أقل من 90 درجة (أي المثلث حاد)–. إذا كانت زاوية واحدة أكبر من 90 درجة (أي المثلث منفرج) فالمركز المحيطي سيقع خارج المثلث، وإذا كانت أحد زوايا المثلث تساوي 90 درجة بالضبط (أي المثلث قائم) إذن سيقع المركز المحيطي عند منتصف الوتر.

لكن يوجد نقطة أخرى يمكن تأهيلها كمركز لمثلث. يمكنك إيجادها عن طريق رسم خط من كل رأس للمثلث بحيث يكون عموديا على الضلع المقابل له. المثير للدهشة، الخطوط الثلاثة تتلاقى أيضا عند نقطة وحيدة، تُدعى *المركز القائم* (مُلتقى الارتفاعات). وكالمركز المحيطي، المركز القائم يقع داخل المثلث إذا كان المثلث حاد وخارجه إذا كان منفرج. وإذا كانت أحد زوايا المثلث تساوي 90 درجة بالضبط (أي المثلث قائم) إذن سيكون المركز القائم أحد رؤوس المثلث.



المركز القائم لمثلث

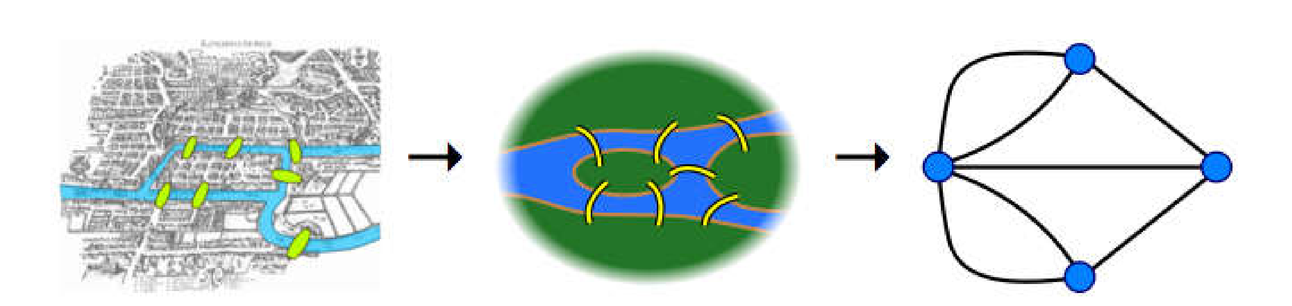
وما الذي يربط كل هذه النقاط معا؟ خط مستقيم! الحقيقة الجميلة أن النقطة المركزية، المركز المحيطي والمركز القائم لمثلث تقع جميعها على خط مستقيم، تم الإعلان عنه لأول مرة في القرن 18 بواسطة *ليونارد أويلر*، واحد من أغزر علماء الرياضيات إنتاجا على مر الزمن. هذا الخط يحمل اسمه الآن: يُدعى *خط أويلر* للمثلث.

****

جسور كونيغسبرغ
(The bridges of Königsberg)

في القرن الثامن عشر، المدينة التي نعرفها حاليا كالينينغراد(Kaliningrad) كانت تُدعى كونيغسبرغ (Königsberg) وكانت جزءا من بروسيا. ومثل العديد من المدن الكبرى الأخرى، كانت كونيغسبرغ مُقسَمة بنهر يُدعى بريغيل. اشتملت على جزيرتين وسبعة جسور تربط بين مُختلف الكُتل الأرضية (اليابسة). في ذلك الوقت كان اللغز الشهير هو إيجاد طريقة سير عبر المدينة بحيث يتم اجتياز كل جسر مرة واحدة فقط. زعم كثير من الأشخاص أنهم قد عثروا على مثل هذا المسار لكن عندما طُلب منهم استذكاره، لا أحد كان قادرا على ذلك. في سنة 1735 شرح عالم الرياضيات *ليونارد أويلر* لماذا: أظهر وبين أن مثل ذاك المسار لم يكن موجودا.

حل أويلر بسيط بشكل مفاجئ – بمجرد إلقاء نظرة على المسألة بطريقة سليمة– الخدعة تكمن في التخلص من كل المعلومات غير الضرورية. لا يهم أي مسار نأخذه للمشي بين مختلف الكتل الأرضية، لا يهم شكل الكتل الأرضية، أو ما هو شكل النهر، أو ما هي شكل الجسور. وبالتالي بالإمكان تمثيل كل كتلة أرضية بنقطة والجسر بخط. ليس عليك أن تكون دقيقا جغرافيا على الإطلاق: طالما أنك لا تُخل بالترابط بين النقاط، أيُها مُرتبط بالآخر، يُمكنك تحريف صورتك بالطريقة التي تريدها من دون تغيير المسألة.



بمجرد أن تستعرض المسألة بهذه الطريقة، تصبح معالمها أسهل بكثير لتُرى، وبعد المحاولة في المسألة لفترة من الوقت قد تلاحظ الآتي: عندما تصل إلى نقطة عبر خط (دخول كتلة أرضية أو يابسة عبر جسر)، ما لم تكن النقطة النهائية أين ينتهي مسارك، أنت في حاجة لمغادرتها مرة أخرى، عن طريق خط مُختلف، على أساس أن هذه هي قواعد اللعبة. وهذا يعني، أنه وباستثناء نقطة الانطلاق ونقطة النهاية، أي نقطة في مسارك يجب أن تشتمل على عدد زوجي من الخطوط الخارجة منها: من أجل أن كل خط تدخل عبره يجب أن يكون هناك واحد للخروج.

ليكون من الممكن، جعل خط سَير يعبر كل خط بالضبط مرة واحدة، يمكن على الأكثر لنقطتين أن يكون لها عدد فردي من الخطوط الخارجة منها. في الواقع يجب أن يكون هناك إما نقطتين فرديتين أو لا يوجد على الإطلاق. في الحالة الأولى النقطتان تتوافقان مع نقطتي الانطلاق والنهاية من السير وفي الحالة الثانية، نقطتي الانطلاق والنهاية هي نفسها. بينما في مسألة كونيغسبرغ، كل النقاط لها عدد فردي من الخطوط الخارجة منها. وبالتالي خط سَير يعبر كل جسر مُستحيل.

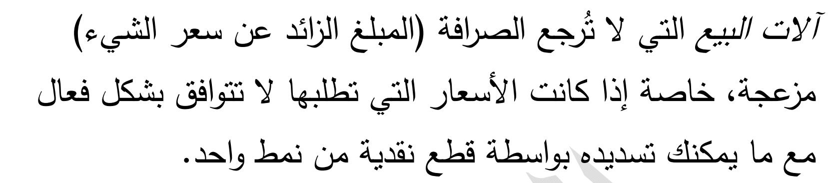
صاغت نتيجة أويلر بداية *نظرية المخططات*، دراسة شبكات مُركبة من نقاط متصلة بواسطة خطوط. كان قادرا أيضا على إظهار أن المُخطط إذا كان يستوفي الشرط أعلاه، أن عدد النقاط التي لها عدد فردي من الخطوط هي إما صفر أو اثنين، سيكون هناك دائما مسار من خلاله يتم عبور كل خط بالضبط مرة واحدة.

صاغت النتيجة أيضا بداية *الطوبولوجيا*، التي تدرس الأشكال فقط من حيث التواصل فيما بينها، من دون الإحاطة علما بالمسافات والزوايا. خريطة مترو أنفاق لندن هي مثال عظيم لانتصار الطوبولوجيا. عن طريق تحريف المسافات والزوايا فانها تتحول إلى ما من شأنه أن يكون مجرد فوضى مُبهمة وغير مفهومة بدل أن تكون خريطة بإمكان أي سائح قراءتها بجهد.

****

هل الجشع جيد؟

(Is greed good?)



آلات البيع التي لا تُرجع الصرافة (المبلغ الزائد عن سعر الشيء) مزعجة، خاصة إذا كانت الأسعار التي تطلبها لا تتوافق بشكل فعال مع ما يمكنك تسديده بواسطة قطع نقدية من نمط واحد.



إذا كان هذا هو الحال، إذن ما من مُشكل يُذكر هنا، لكن للنفاذ عبر محفظة أموالك، واختيار القطع النقدية المناسبة لتسديد المبلغ بالضبط. ما هي أفضل طريقة للقيام بذلك؟ من دون أن نشعر، الكثير منا على الغالب يتبع هذه الطريقة: إيجاد أكبر (فئة) قطعة نقدية تتناسب مع المبلغ، ثم أكبر قطعة نقدية موالية تتناسب مع الباقي، وهكذا، إلى أن تستطيع (آملا) تسديد كامل المبلغ المطلوب. مثال على ذلك، إذا طُلب منك تسديد مبلغ 85 جنيه إسترليني، على الغالب ستختار قطعة نقدية من فئة 50 جنيه أولا، ثم قطعة نقدية من فئة 20 جنيه، ثم من فئة 10 جنيه، وأخير من فئة 5 جنيه. وماذا لو لم يكن لديك جميع القطع النقدية التي أشرنا إليها للتو، في محفظتك؟ في هذه الحالة ستتبع نفس الطريقة باستخدام ما لديك.

هذه الطريقة *الجشعة* (جشعة لأنك تذهب دائما إلى أكبر قطعة نقدية تحقق التناسب) يبدو أنها تعرض أفضل الحلول من حيث أنها تنطوي على أقل عدد من القطع النقدية اللازمة لتسديد المبلغ المطلوب. على سبيل المثال، لنفترض أن لديك قطعة نقدية من فئة 20 جنيه إسترليني، لكن قررت أن تضع قطعتين نقديتين من فئة 10 جنيه بدلا عنها، أي أنك زدت من عدد القطع النقدية لتسديد مبلغ 85 جنيه إسترليني من أربع قطع إلى خمس قطع. أي أن الخوارزمية الجشعة تبدو مفيدة وفعالة، ليس فقط للأشخاص الذين يتصارعون مع آلات البيع، لكن أيضا للصرافين الذين يُرجعون الباقي للزبائن.

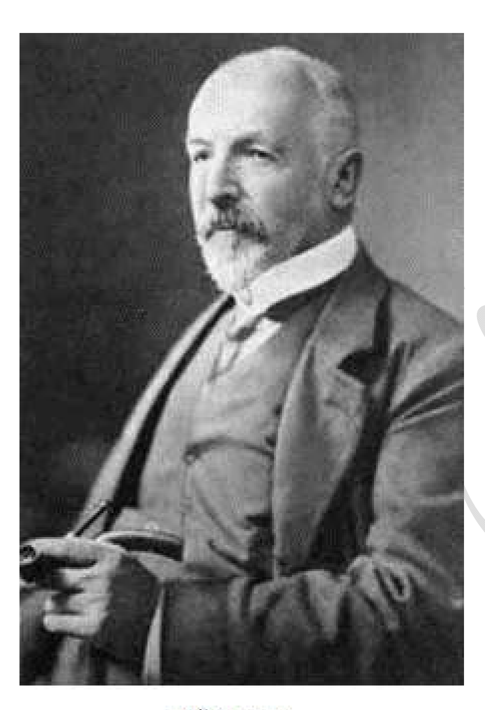
لكن هل الجشع حقا هو الخيار الأفضل دائما؟ قد تبين أن هذا يعتمد على القطع النقدية المتوفرة لديك. تخيل، على سبيل المثال، أنك في حاجة لتسديد مبلغ 8 جنيه إسترليني. الجشع سيخبرك بأن تذهب إلى القطعة النقدية من فئة 5 جنيه، ثم فئة 2 جنيه، ثم فئة 1 جنيه. وهذا في الواقع أقل عدد من القطع النقدية اللازمة لتسديد مبلغ 8 جنيه، إذا كنت تستخدم الجنيه الإسترليني، الأورو، الدولار

الأمريكي، ومعظم العملات المُتداولة الأخرى. لكن الآن تخيل عملة مُتداولة، لديها بالإضافة إلى هذه الفئات، قطعة نقدية من فئة 4 جنيه. وبالتالي باستطاعتك تسديد مبلغ 8 جنيه باستخدام قطعتين منها، والفوز على إستراتيجية الجشع بالضربة القاضية. قد يبدو نظام عملة من هذا النمط، سخيفا نوعا ما، لكنه قد يكون غير مسموع به: كان نظام *سك القطع النقدية دون–العشرية البريطاني* واحدا من الأنظمة التي تفشل طريقة الجشع معها، عندما يتعلق الأمر بتقليل عدد القطع النقدية اللازمة لتسديد مبلغ ما.

****

عَد الأعداد

(Counting numbers)


جورج كانتور

هل هناك أعداد غير كسرية أكثر من الأعداد الكسرية، أو أعداد كسرية أكثر من الأعداد غير الكسرية؟ حسنا، هناك عدد لانهائي من كليهما، وبالتالي فالسؤال لا معنى له. لكن اتضح، مع ذلك، أن مجموعة الأعداد الكسرية هي لانهائية بطريقة مختلفة تماما عن مجموعة الأعداد غير الكسرية، الأعداد الكسرية (تلك التي يُمكن كتابتها على شكل كسور) يُمكن ترتيبها واحدا تلو الآخر وجدولتها1، 2، 3، 4، الخ. وهي تُشكل ما يُسَميه علماء الرياضيات اللانهايات القابلة للعد. لا ينطبق نفس الشيء على الأعداد غير الكسرية (تلك التي لا يُمكن كتابتها على شكل كسور): هي تشكل مجموعة لانهائية غير قابلة للعد. في سنة 1873 جاء عالم الرياضيات جورج *كانتور* بإثبات جميل وأنيق لهذه الحقيقة. لاحظ أولا أنه عندما نضع الأعداد الكسرية مع الأعداد غير الكسرية معا نحصل على جميع الأعداد الحقيقية:

كل رقم على خط الأعداد هو إما كسري أو غير كسري. إذا كانت الأعداد غير الكسرية قابلة للعد، تماما كما هي عليه الأعداد الكسرية، إذن الأعداد الحقيقية يجب أن تكون قابلة للعد أيضا– ليس من الصعب جدا أن تقتنع بذلك–

لذلك دعنا نفترض أن الأعداد الحقيقية قابلة للعد، وبالتالي يمكننا وضع قائمة لها، على سبيل المثال

1. 0.1234567...
2. 1.4367892...
3. 2.3987851...
4. 3.7891234...
5. 4.1415695...

وهكذا...مع تدوير تقريبي لكل عدد حقيقي في القائمة اللانهائية. الآن نأخذ الرقم الأول بعد الفاصلة العشرية من العدد الأول، الرقم الثاني بعد الفاصلة العشرية من العدد الثاني، الرقم الثالث بعد الفاصلة العشرية من العدد الثالث، وهكذا...للحصول على عدد جديد ...0.13816

الآن نغير كل رقم في هذا العدد الجديد، على سبيل المثال بإضافة 1. هذا يعطينا عدد جديد ...0.24927 هذا العدد الجديد هو ليس نفس العدد الأول في القائمة، لأن أرقامه العشرية الأولى مختلفة. ولا هو نفس العدد الثاني في القائمة، لأن أرقامه العشرية الثانية مختلفة. المواصلة على نفس المنوال تُظهر أن العدد الجديد يختلف تماما عن كل عدد في القائمة، وبالتالي فإنه لا يمكن أن يظهر في أي مكان في القائمة.

لكننا انطلقنا مع فرضية أن كل عدد حقيقي موجود في القائمة! الطريقة الوحيدة لتجنب هذا التناقض هي بالتسليم أن فرضية أن الأعداد الحقيقية قابلة للعد خاطئة. وهذا يقتضي ضمنا أن الأعداد غير الكسرية غير قابلة للعد.

من السهل أن نرى أن اللانهايات غير القابلة للعد "أكبر" من تلك القابلة للعد. اللانهايات غير قابلة للعد يُمكن أن تُشكل تسلسلا متواصلا، مثل خط الأعداد، بطريقة لا يُمكن للانهايات القابلة للعد أن تشكلها. كانتور ذهب نحو تحديد كل أنواع اللانهايات الأخرى أيضا. واحدة أكبر من الأخرى، مع اللانهايات القابلة للعد في أسفل التسلسل الهرمي. عندما نشر هذه الأفكار لأول مرة، كانتور واجه مُعارضة قوية من بعض زملائه. من بينهم، *هنري بوانكاريه*، الذي وصف أفكار كانتور بأنها "مرض خطير" وآخر، *ليوبولد كرونيكير*، ذهب أبعد من ذلك باتهام كانتور بـ "الدجال العلمي" و"المفسد للشباب". عانى كانتور من مشاكل حادة في صحته العقلية والتي ربما قد تسببت في جزء منها، المعارضة التي لاقاها عن عمله هذا. لكننا نعلم الآن وبعد عمله الذي مضى عليه حوالي الـ150 عاما، أن أفكار كانتور تُشكل ركيزة أساسية للرياضيات والعديد من نتائجه يمكن العثور عليها في الكتب المدرسية القياسية.

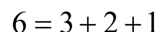
****

الأعداد المثالية

(Perfect numbers)



الأعداد المثالية هي أعداد طبيعية مجموع قواسمهما تعطينا العدد نفسه، العدد 6 أفضل مثال، قواسم 6 هي 3,2,1 (نستثني العدد 6 في حد ذاته، و نحتسب فقط القواسم الصحيحة الأخرى) ولأننا نجد



$$6 = 3 + 2 + 1$$

عرف الناس الأعداد المثالية منذ آلالاف السنين، وفُتنوا دائما بها، *القديس أوغسطينوس* (354-430) اعتقد أن مثالية العدد 6 هي السبب وراء اختيار الله أن يخلق العالم في 6 أيام، الاغريقي *نيقوماخس الجاراسيني* (60-120) اعتقد أن الأعداد المثالية تُنتج الفضيلة، تقيس فقط اللياقة والجمال، الأعداد غير المثالية، على سبيل المثال هي أعداد مجموع قواسمها الصحيحة والمناسبة أكبر من العدد نفسه. وجد نيقوماخس فيها فوضى كبيرة، واتهمها بإنتاج الفائض، الأشياء غير الضرورية، المُغالاة والتعسف، كأن تكون مثل حيوانات بها

" عشرة أفواه، أو تسعة شفاه، وتأتي مع ثلاثة صفوف من الأسنان، أو مع مئات الأضراس، أو تجد بها العديد من الأصابع في إحدى يديها ".



إذا كان هناك عدد غير مثالي على شكل حيوان، فقد يبدو تقريبا هكذا.

إذا كنت تدرس الأعداد لفترة لترى لما الناس مولعين ومفتونين دائما وكثيرا بالأعداد المثالية: هي نادرة جدا، العدد التالي بعد 6 هو 28 ثم 496، ومن أجل إيجاد العدد المثالي الرابع علينا الذهاب بعيدا إلى الوصول إلى 8128، طوال العصور القديمة، وحتى فترة متقدمة من العصور الوسطى، هذه الأربعة كانت الأعداد المثالية الوحيدة المعروفة، اليوم مازلنا لا نعرف سوى 48 منهم، على الرغم من أن هناك أجهزة كمبيوتر سريعة لمساعدتنا في العثور عليهم، الأكبر إلى الآن، أُكتُشف في *جانفي 2013*، فيه أكثر من 34 مليون رقم.

هل سنستطيع إيجاد آخر؟ لا يمكن أن نكون على يقين من ذلك– علماء الرياضيات يعتقدون بوجود عدد لانهائي من الأعداد المثالية– إذن الذخيرة لن تنفذ أبدا، لكن لا أحد تَمَكنَ من إثبات ذلك، إنها واحدة من أعظم الألغاز في الرياضيات.

****

أعداد العَد الثنائي

(Binary numbers)



أغلب الناس تخاف من حقيقة أن أجهزة الكمبيوتر تعمل باستخدام أوتار من $0s$ و $1s$. ولكن كيف يُمكنك كتابة الأعداد فقط باستخدام هذين الرمزين؟ لنرى كيف، دعونا أولا نُذكر أنفسنا بطريقة عمل الطريقة العشرية العادية في كتابة الأعداد، دعونا نأخذ العدد 4302 كمثال، الرقم 4 في هذا العدد لا يقف عند 4 بل يقف عند 4000 أو 4×1000، بالمثل، الرقم 3 لا يقف عند 3 لكن عند $300 = 3\times100$ وهكذا دواليك

$$4\times1000+3\times100+0\times10+2\times1$$

و بالمثل، 7396 تقف من أجل: $7\times1000+3\times100+9\times10+6\times1$

ماذا تفعل الأعداد 1,10,100,1000، والتي تظهر في هذه العبارات، هل تملك صفة مُشتركة؟ كلها قوى للعدد 10:

$$1000=10^3$$

$$100=10^2$$

$$10 = 10^1$$

$$1 = 10^0$$

لكتابة عدد في التدوين العشري، عليك أولا كتابته كمجموع قوى متتالية من 10 (مع أكبر قوة على اليسار) ثم نسحب معاملات هذه القوى، يمكننا أن نفعل الشيء ذاته مع قوى من 2 بدلا من 10. على سبيل المثال، العَد الثنائي للعدد 110 يقف عند:

$$1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6$$ (كُتب بنظام عشري)

العَد الثنائي للعدد 10001 يقف عند:

$$1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 16 + 0 + 0 + 0 + 1 = 17$$

(كُتب بنظام عشري)

يمكنك أن تثق أن العدد الثنائي يتكون فقط من الأرقام 0 أو 1: عندما تكتب عدد كمجموع قوى متتالية من 2. لا معاملات أخرى ضرورية.

هذا يُفرز الأعداد الطبيعية، لكن ماذا عن الأعداد التي لديها جزء كسري؟ لكتابة عدد بين 0 و 1 في العَد الثنائي، ستنجز نفس اللعبة باستخدام قوى من $\left(\frac{1}{2}\right)$ بدلا من 2. على سبيل المثال:

$$0.75 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 \times \frac{1}{2^1} + 1 \times \frac{1}{2^2}$$

في العَد الثنائي 0.75 يُكتب 0.11، العَد الثنائي للعدد 0.1001 يقف عند العدد العشري:

$$1 \times \frac{1}{2^1} + 0 \times \frac{1}{2^2} + 0 \times \frac{1}{2^3} + 1 \times \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 0.5625$$

الأمر سهل !

****

راقب وحداتك!

(Watch your units!)

جميعنا يرتكب أخطاءا مُحرجة، لكن هذا الخطأ، يُعتبر واحدا من أكثر الأخطاء إحراجا على مر التاريخ. في 23 سبتمبر 1999، المركبة الفضائية **مسبار مُناخ المريخ** (Mars Climate Orbiter) دخلت في مدارها المُستهدف حول المريخ، أين كان مُقررا لها مراقبة مناخ الكوكب الأحمر وغلافه الجوي لمدة عام مريخي واحد (أي ما يقارب عامَين أرضيين). وبعد بضع دقائق اختفت كما ينبغي لها وراء المريخ، لكنها لم تُعاود الظهور على الجانب الآخر. بعد أسبوع، تخلت الناسا (NASA) رسميا عن المركبة الفضائية. وخلُص "تقرير تحقيق الحادث المؤسف" في وقت لاحق، أن المسبار الذي بلغت تكلفته 193 مليون دولار، قد دخل في مدار على ارتفاع أقل بكثير مما كان مُخططا له، ونتيجة لذلك، إما تَفكك في الغلاف الجوي أو انطلق بسرعة في مدار حول الشمس.



بشكل مُحرج، الخطأ كان نتيجة التباس حول الوحدات: *لوكهيد–مارتن* (Lockheed–Martin) الشركة التي شغلت المركبة الفضائية لناسا، تستخدم الوحدات الضخمة في القياس– الأميال، الأقدام والأرطال– بينما يستخدم فريق ناسا، المتري منها. لقد كانت لوكهيد–مارتن خارجة عن المُعتاد لدى بقية دول العالم في هذا، لكن ناسا ردت بلباقة. " يرتكب الناس أخطاءا في بعض الأحيان. المشكلة هنا ليست في الخطأ، إنما في فشل المنظومة الهندسية في وكالة ناسا. وفي المراجعات والترجيحات في عملياتنا لاستبيان الأخطاء. وهذا هو السبب في أننا فقدنا المركبة الفضائية " هذا ما قاله آنذاك *ادوارد ويلر*، مساعد مدير في علوم الفضاء في وكالة الفضاء ناسا.

فشل البعثة، وضح ما يجب على رواد الفضاء معرفته منذ قرون: اختلاف الوحدات مُربك. على الرغم من أن بعض الدول تُصر على وحدات قياس شاذة، إلا أنه من الواضح أن المعيار العالمي هو المطلوب بشكل معقول. والسؤال هو عن الأساس الذي نبني عليه هذا. تستخدم العديد من الوحدات التقليدية أبعاد

الجسم البشري– طول القدم، الأصابع وما إلى ذلك– لكن هذه وكما يتضح مُتغيرة جدا في إعطاء تعريف ثابت. **المتر** تم تعريفه وتحديده ليكون أكثر عالمية. في عام 1791، أربع سنوات بعد الثورة الفرنسية وروحها التجديدية، قررت الأكاديمية الفرنسية للعلوم تثبيته عند *عشرة– مليون* واحدة، من المسافة بين خط الاستواء والقطب الشمالي، مُقاسة عند مستوى سطح البحر. كان السؤال حول، كيف لنا قياس هذه المسافة، لذلك أرسلت الأكاديمية رحلة استكشافية، استمرت لمدة سبع سنوات، وتنقلت من دنكرك في فرنسا إلى برشلونة في اسبانيا، للقيام بعمل التثليث الضروري للخروج باستنتاج.

على الرغم من سوء الحظ، الأرض ليست كرة مثالية أو لها أي شكل رياضياتي أنيق، لذلك فهي حقيقة لا تُقدم نفسها كمقياس يمكن على أساسه تحديد وحدات. وهذا هو سبب رغبة نظام الوحدات الدولي الحديث (**SI** units)، والذي اختارت شركة لوكهيد–مارتن تجاهله، ربط تعريفه بشيء أكثر ثباتا: سرعة الضوء في الفراغ، في عام 1983 تم تعريف المتر كالآتي:

طول المسار الذي يقطعه الضوء في الفراغ خلال فترة زمنية من $\frac{1}{2.299.792.458}$ *من الثانية.*

وهذا بطبيعة الحال يتطلب تعريفا دقيقا للثانية: حسب تخمينك على الغالب، لم يعد التعريف للثانية على أنها $\frac{1}{60\times60\times24}=\frac{1}{86.400}$ من اليوم، يُجدي نفعا، لكن تعريف الثانية المُجدي، هو كالآتي:

مدة **9.192.631.770** *من فترات الإشعاع المطابقة للانتقال بين مستويين للطاقة من حالة الاستقرار في ذرة السيزيوم–133* . الترجمة للمفهوم تقريبية إلى حد ما. للمزيد من الفهم استعن بويكيبيديا.

قد يبدو هذا مُعقدا نوعا ما، لكن كل هذا تحت مُسمى *الدقة*، التي وكما وضحها – خطؤنا المُحرج المفضل ذاك– تبين أنها مهمة.

****

جمع الكسور (أسهل طريقة)

(Adding fractions (the easy way))



جمع الكسور على الغالب كان أول خطوة صعبة واجهناها في الرياضيات في المدرسة. على سبيل المثال، لانجاز $\frac{7}{10}+\frac{5}{6}$ تحتاج أولا لاكتشاف أدنى مُضاعف مُشترك لكل من 6 و 10 وهو 30، ومن أجل الحصول على 30 في مقام الكسرين أنت في حاجة إلى ضرب البسط 5 في 5 والبسط 7 في 3.

وهذا يُعطينا

$$\frac{46}{30}=\frac{(21+25)}{30}=\frac{21}{30}+\frac{25}{30}=\frac{(3\times7)}{30}+\frac{(5\times5)}{30}=\frac{7}{10}+\frac{5}{6}$$

ثم ستحتاج إلى التخلص من العوامل المشتركة بين 46 و 30، للوصول للنتيجة النهائية $\frac{23}{15}$ والتي تبدو غير مُشابهة على الإطلاق للكسريين الأصليين. انجاز هذا بالنسبة لأحد في العاشرة من العمر لم يسبق له مشاهدة هذه الطريقة من قبل، أمر صعب جدا.

هنا وصفة بديلة تعمل دائما ولا تستدعي البحث عن أدنى القواسم المشتركة. كتابة "الأعلى" في البسط و"الأسفل" في المقام، الفكرة هي في انجاز الآتي:

(أعلى اليمين في أسفل اليسار + أعلى اليسار في أسفل اليمين) ÷ (أسفل اليمين في أسفل اليسار)

تطبيق هذا على مثالنا يعطينا $\frac{23}{15}=\frac{92}{60}=\frac{(42+50)}{60}=\frac{(6\times7+10\times5)}{(10\times6)}=\frac{7}{10}+\frac{5}{6}$

الفرق في الطريقة القياسية في جمع الكسور هو عدم حاجتك للبحث عن القاسم المشترك الأصغر. ببساطة استخدم جداء المقامين كمقام مشترك. بعدها، وبغرض دمج الكسرين مع هذا المقام المشترك تحتاج فقط لضرب بسط كل كسر مع مقام الكسر الثاني،

سهلة !

وكما يبدو أن هذه هي الطريقة التي استخدمها الهنود في الهند القديمة في جمع الكسور.

****

بديهيات إقليدس
(Euclid's axioms)

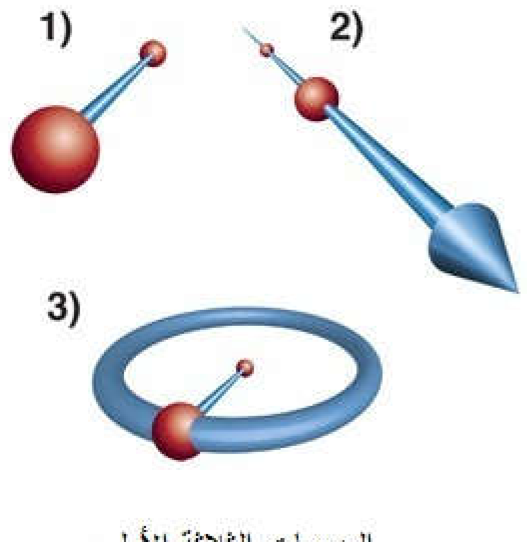


إقليدس الإسكندرية

إقليدس الإسكندرية هو عالم رياضيات يوناني عاش قبل أكثر من 2000 سنة مضت، وأحيانا كان يُدعى "أب الهندسة"، كتاب إقليدس "العناصر" يُعد واحدا من أكثر الكتب نجاحا على الإطلاق. قال البعض أنه ليس هناك سوى الكتاب المُقدس يفوقه من حيث عدد الطبعات، كان أيضا أقدم مناقشة منهجية نعرفها للهندسة. فيه وضع إقليدس قواعد الهندسة.

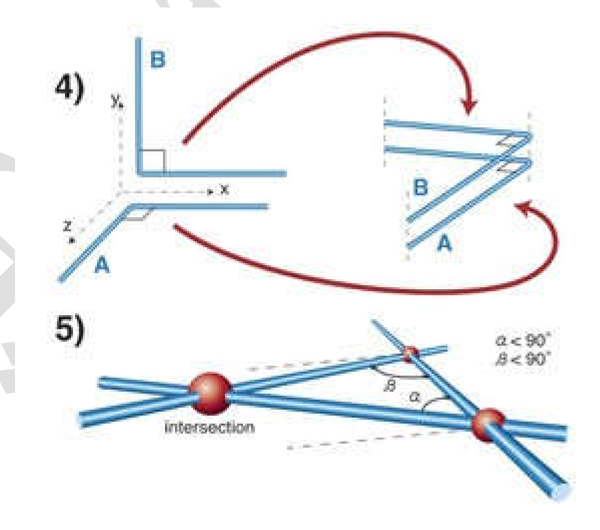
إقليدس كان مُهتما بجميع الأمور التي يُمكن أن تفعلها مع حافة مُستقيمة (مسطرة من دون علامات) وفرجار، وقد جاء بمجموعته الخاصة من خمس قواعد تصف بعض الأشياء الأساسية التي يُمكن أن تفعلها بهذه الأدوات، إضافة إلى بعض الحقائق حول الزوايا والخطوط والتي اعتقد أنها على نحو جلي صحيحة ولا تحتاج إلى شرح.

1. مع أي نقطتين مُعطاة، يُمكنك رسم خط مُستقيم بينهما (إنشاء ما يُسمى قطعة مستقيمة).
2. أي قطعة مستقيمة يُمكن تمثيلها بالطول الذي تشاء (بمعنى، تمديدها إلى مالانهاية).
3. مع نقطة مُعطاة وقطعة مُستقيمة تبدأ من تلك النقطة، يُمكنك رسم دائرة مركزها تلك النقطة ونصف قطرها القطعة المُستقيمة المُعطاة.



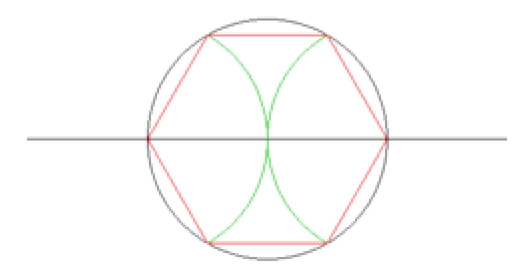
البديهيات الثلاثة الأولى

4. كل الزوايا القائمة مُساوية لبعضها البعض (وهذا قد يبدو غريبا بعض الشيء).
5. إذا رَسَمتَ قطعة مستقيمة تقطع خطين مُستقيمين ونشأ عن ذلك زاويتين في نفس الجهة واللتين مجموعهما أقل من مجموع زاويتين قائمتين، إذن هذين الخطين المُستقيمين مُتقاطعين (هذه البديهة مُساوية للقول بأن الزوايا في المثلث مجموعها 180 درجة)

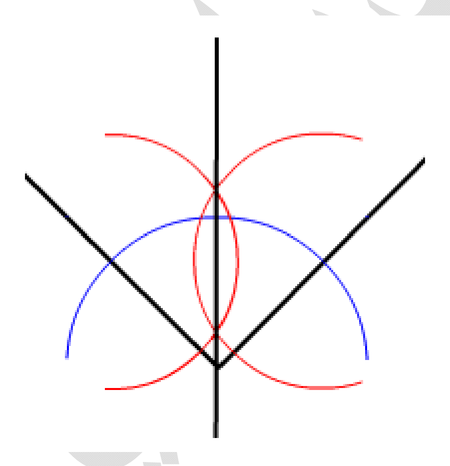


البديهيات 4 و5

هناك الكثير من الأشياء الجميلة التي يمكنك القيام بها مع بديهيات إقليدس. على سبيل المثال، يمكنك رسم سُداسي منتظم.



أو يمكنك شطر زاوية، بمعنى، يمكنك تقسيمها إلى زاويتين متساويتين.



في الواقع، هذه هي الأدوات والوسائل التي استخدمها عُمال البناء لإنشاء الزخارف والنوافذ الجميلة في الكنائس والكاتدرائيات.

البديهية الخامسة، مع ذلك، تسببت لعلماء الرياضيات في بعض المشاكل: لقد اعتقدوا أنها يجب أن تكون في الواقع نتيجة للحقائق الأربعة الأولى، محاولاتهم لإثباتها أرشدتهم في نهاية المطاف إلى عالم غريب ورائع من الهندسة غير الإقليدية.

****

بديهية إقليدس الرابعة

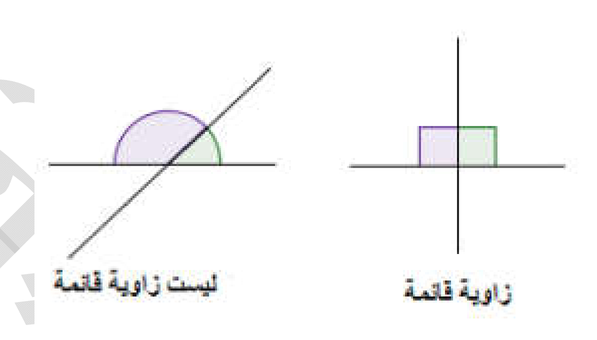
(Euclid's fourth axiom)



قبل 2000 سنة مضت عالم الرياضيات الإغريقي *إقليدس الإسكندرية* أسس بديهياته الخمسة في الهندسة: كانت بمثابة بيانات اعتقد أنها صحيحة بشكل جلي ولا تحتاج إلى المزيد من التبرير، الثلاثة الأولى هي في الواقع واضحة جدا. الافتراض، على سبيل المثال، أنه من خلال أي نقطتين هناك خط مستقيم، الرابعة، مع ذلك، تبدو غريبة بعض الشيء، إذ تقول:

جميع الزوايا القائمة مُساوية لبعضها البعض.

هذا الحالة تبدو بلهاء وفارغة جدا: الزاوية القائمة هي 90 درجة زاويّه، وبكل وضوح كل 90 درجات زاويّه مُتساوية، ولكن يمكننا فهم حاجة إقليدس وراء صياغة هذه الحقيقة عندما نعتبر أنه لا يصف الزاوية القائمة من ناحية الدرجات أو أي نظام قياس آخر للدرجات (هو لم يكن يملك واحدا)، بدلا من ذلك هو يصفها من ناحية الصورة الهندسية: إذا تَقَاطَعَ خطان، والزاويتان المُتشكلتان عن هذا التقاطع متساويتان، إذن هذه هي زاويتك القائمة.



الآن لنفرض أن لديك زاويتين تحقق هذا التعريف حول كونها قائمة، مرسومة على قطعتين مُنفصلتين من الورق (أو على ورق البُردي إذا كنت إقليدس) قد يكون لديك ارتياب مُزعج أنه رُبما قد تكون هاتين الزاويتين مُختلفتين عن بعضهما بعضا، البديهة الرابعة تقول لا، هاتين الزاويتين القائمتين في الواقع متساويتان بمعنى أنه يُمكنك وضع أحدهما فوق الأخرى وتتطابقان تماما، بتأسيس هذه الحقيقة إقليدس

أصبح بإمكانه بعدها الذهاب إلى قياس الزوايا الأخرى من ناحية الزوايا القائمة، على سبيل المثال بالقول أن زاوية مُحددة تُساوي ثلاث زوايا قائمة.

****

كتابة المجاميع اللانهائية

(Writing infinite sums)



إذا قلت لك أن تنظر في مجموع لانهائية

$$\ldots 5+4+3+2+1$$

ستعرف ما أعنيه. فإنه من السهل أن يستمر هذا النمط، إذ تأتي لاحقا 6، ثم 7، وهلم جرا. الشيء نفسه ينطبق على مجموع لانهائية

$$\ldots+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1$$

ولكن ماذا لو كان النمط أقل وضوحا؟ على سبيل المثال، فإنه من الصعب قليلا أن نرى كيفية مواصلة

$$\ldots-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1$$

يبدو وكأننا بحاجة إلى وسيلة أفضل لكتابة المجاميع اللانهائية التي لا تعتمد على تخمين الأنماط. لحسن الحظ، هناك واحدة. إنها أسهل للفهم باستخدام على سبيل المثال:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$$

الرمز Σ يوضع لأجل "المجموع"، الرمز i هو "المتغير الوهمي". الصيغة ترشدنا لتشكيل المجموع الذي قيمه هي التعبير الذي يأتي بعد تعويض Σ مع الرمز i بكل من: $4,3,2,1,...$ وهكذا...وصولا إلى المالانهاية، هكذا $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$ نضعها لأجل $...+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1$

العبارة $\sum_{i=1}^{\infty} i$ نضعها لأجل $...5+4+3+2+1$

و $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ لأجل $...+\frac{1}{25}+\frac{1}{16}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+1$

يمكنك حتى التعبير عن المجاميع التي قيمها تتراوح بين السالبة والموجبة، على سبيل المثال:

$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{i}$ نضعها لأجل $...+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-$

ماذا عن مجموعنا أعلاه $...-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1$

هل بإمكانك التعبير عنه وفق صياغة Σ ؟

إنها صعبة قليلا، حاول قليلا ! إن لم تستطع إيجاد الإجابة، فها هي!

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-...=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2i+1}-\frac{1}{4i+2}-\frac{1}{4i+4}.$$

ولكن لماذا نريد أن نكتب مجاميع لا نهائية في المقام الأول؟ السبب هو أنه وعلى الرغم من أنها طويلة لانهائية، فإنها يمكن أن تظل تتقارب إلى قيمة محدودة. في الواقع، كتابة كميات معينة كالمجاميع اللانهائية (وتسمى أكثر بشكل صحيح سلاسل لانهاية) هو أداة قوية في الرياضيات.

****

ما هو المعدل ؟

(What's average?)



معظم الناس لديهم أكثر من *معدل (Average)* عدد الآذان. قد يبدو هذا غريبا، لكنه صحيح. الغالبية العظمى من الناس لديهم زوج من الآذان، لكن القلة التي لها أذن واحدة أو ليس لها أذن تخفض المعدل إلى أقل من اثنين. من السهل توضيح ذلك من خلال تخيل أن هناك خمسة أشخاص فقط في العالم من بينهم شخص لديه أذن واحدة فقط. معدل عدد الآذان هو:

$$1.8 = \frac{9}{5} = \frac{1+2+2+2+2}{5}$$

المعدل (يسمى تقنيا المتوسط الحسابي) يتم احتسابه بجمع عدد آذان كل الأفراد حول العالم وبعد ذلك يُقسم على العدد الكلي للأفراد. المثال يوضح أن المعدل لا يُمثل دائما أفضل آداة يمكن استخدامها إذا أردت أن تضع تقريرا إجماليا عن شيء ما. يمكن لفئة قليلة من أصحاب الدخل العالي رفع معدل الدخل لعدد السكان، وإعطاء الانطباع بأن جميع الأفراد على العموم هم أفضل حالا بكثير مما هم عليه في الواقع.

لكن لحسن الحظ، هناك آداة أخرى يمكنك استخدامها والتي قد تكون أكثر ملائمة. أحدها *الوسيط (أو الأوسط) (Mean)* تحتسبه عن طريق تسجيل كل الأرقام في المسألة (آذان، دخل، وما إلى ذلك) بالترتيب ثم اختيار الأوسط فيهم. على سبيل المثال إذا كان هناك خمسة أشخاص يكسبون $£4000, £3500, £3000, £1000, £1000$ في الشهر، إذن الوسيط هو $£3000$.

اِنه يخبرك أن ما يقارب نصف الأشخاص يكسبون أقل من ذلك، والنصف الآخر أكثر(إذا كان هناك عدد زوجي من الأشخاص، الوسيط يجب أن يقطع بالضبط نصف المسافة بين منتصف اثنين– بعبارة أخرى– (يجب أن يكون المتوسط الحسابي لمنتصف اثنين).

بدلا من ذلك، يمكنك حساب *المنوال (mode)*. وهو العدد الأكثر تكراراً في قائمتك. في المثال أعلاه المنوال هو 1000£، أي يخبرك أن معظم الأشخاص في قائمتك يكسبون ذاك المبلغ. أو قد تذهب *لمنتصف–المدى (أو منتصف–النطاق) (midrange)*: اجمع أصغر وأكبر عدد واقسمه على اثنين. في مثالنا يعطينا $\frac{(£4000+£1000)}{2}=£2500$ (الاحصائيون لا يستخدمون منتصف–المدى غالبا، جزئيا بسبب، وكالمتوسط الحسابي، يسهل انحرافه بواسطة القيم المتطرفة)

لذا، في المرة القادمة حين تسمع رواية عن متوسط ما في نشرة الأخبار، ضع في اعتبارك أنه قد يكون مضللا.

****

الزُمَرْ
(Groups)

طريقة واحدة للانطلاق نحو استيعاب الزُمَرْ، تلك البُنيات المُجردة، المخيفة بعض الشيء، والتي تنتمي إلى مجال الجبر، وهي التفكير في مدار الـ12 ساعة، يمكنك إضافة ساعات على هذه الساعة، على سبيل المثال:



الـ2 تماما +4 ساعات= الـ6 تماما

الـ8 تماما +5 ساعات= الـ 1 تماما

الـ3 تماما + 12 ساعة= الـ3 تماما

وما إلى ذلك. أمر واحد نميزه هنا، أنه مهما يكن عدد الساعات التي تُضيفها، الإجابة دائما ما تكون رقما ما بين 1 و12. وبهذا المعنى، الإضافة على مدار الـ12 ساعة مُغلق: لن يحصل قط أن تخرج من نطاق الـ 1 إلى الـ12.

أمر آخر نميزه. أن إضافة 12 ساعة تُعيدك من حيث بدأت (وكأنك لم تفعل شيء) : من أجل أي زمن بدء a لدينا:

$$a+12=a$$

وهذا هو سبب إمكانية أن نساوي تماما في كتابة الـ 0 من أجل العدد 12 في ساعاتنا وذلك على مستوى العالم.

ميزة أخرى مثيرة للاهتمام، وهي عند إضافتك لعدد a من الساعات، باستطاعتك العودة من حيث بدأت بإضافة (12−a) ساعة، أخرى. على سبيل المثال، بدأت من الساعة الـ1 تماما وأضفت 7 مما يعطيك:

$1+7=8$ (في هذه الحالة a =7)

ثم أضفت $(12-7)=5$ ساعة أخرى، ما يعطيك:

$$8+5=1$$

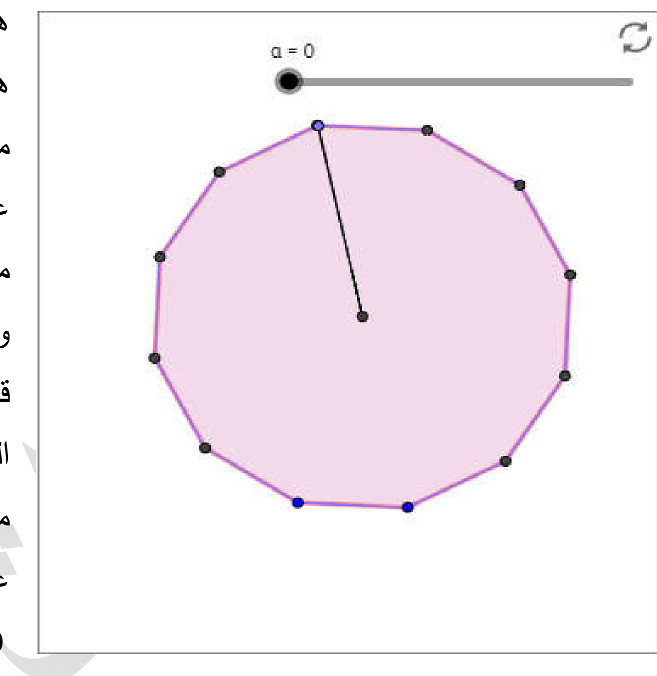
ومنه إضافة a ثم (12−a) تُماثل كونك لم تفعل شيء: أو تُكافئ، إضافة 12.

بأخذ خطوة صغيرة نحو التجريد، يمكننا وصف الـ12 ساعة في علم الحساب كالآتي. لدينا مجموعة S (التي تتألف من الأعداد 1 إلى 12) و*عملية ثنائية* تدمج أي عنصرين من S لإعطاء ثالث (العملية هي إضافة *مودولو* 12 (*modulo*−12) في مثالنا). المجموعة والعملية تحقق القواعد الثلاثة التالية:

- كلما قمت بجمع عنصرين من المجموعة S النتيجة هي أيضا عنصر من S، عملية الجمع مُغلقة.
- هناك عنصر من S (في حالتنا الرقم 12)، بحيث عند إضافة هذا العنصر إلى أي عنصر آخر a من S، النتيجة هي a. هذا العنصر في S يُدعى *المُحايد*.
- لكل عنصر a من S هناك عنصر آخر b من S، بحيث a+b مُساوية للمُحايد في S. العنصر b يُدعى *مُعاكس* (*عكسي، مُتمم*) a (في مثال الساعة، مُعاكس a هو(12−a)، الموضح فيما سبق.

هناك أيضا قاعدة رابعة مُحققة بواسطة مجموعتنا وعمليتنا

- من أجل ثلاثة عناصر a و b و c من S لدينا (a+b)+c=a+(b+c) بعبارة أخرى، أنه لا يهم فيما إذا ما قمت بإضافة العدد الثالث إلى مجموع العددين الأولين، أو إذا ما قمت بإضافة مجموع العددين التاليين إلى العدد الأول.



هناك العديد من البنيات الأخرى التي تحقق أيضا هذه القواعد. وكمثال على ذلك، فكر في مضلع منتظم من 12– ضلع، كالموضح في الصورة على اليمين. يمكنك تدوير هذا الشكل حول مركزه بـ30 درجة، في اتجاه عقارب الساعة، وسينتهي بك المطاف مع نفس الشكل الذي كنت قد بدأت به. الدوران هو *تناظر* في المضلع المنتظم ذو الـ12– ضلع. الآن دعوا مجموعتنا S تتألف من جميع الدورانات في اتجاه عقارب الساعة من مضاعفات 30 درجة. ومنه 30 درجة، 60 درجة، 90 درجة، الخ،... جميع التقدُمات وصولا إلى 330 درجة...وأخيرا، الدورة الكاملة (كل هذه تناظرات من الـ12– ضلع) فكر في جمع دورانين عند قيامك بإحداها تلو الأخرى: الدوران بمقدار 60 درجة + الدوران بمقدار 90 درجة تساوي الدوران بمقدار 150 درجة.

هذه البُنية تشكل زُمرَة. الجمع مُغلق لأنه عندما تُتبع دوران واحد باتجاه عقارب الساعة من مضاعفات 30 درجة، بآخر. النتيجة هي أيضا دوران باتجاه عقارب الساعة من مضاعفات 30 درجة. هناك أيضا عنصر مُحايد، نعني به أي دوران بمقدار 360درجة. لكل دوران يوجد دوران مُعاكس، بحيث الدمج بين الاثنين يعطينا نفس نتيجة الدوران المُحايد (بمقدار 360 درجة). على سبيل المثال، مُعاكس الدوران بمقدار 30 درجة هو الدوران بمقدار 330 درجة.

بشكل عام، الزُمرَة: هي مجموعة S من عناصر مُدمجة مع عملية ثنائية تحقق القواعد الأربعة أعلاه. مثالينا السابقين هما من نوع الزمرة المنتهية، أين المجموعة S تتكون من عدد منته من العناصر. لكن

هناك زُمر غير منتهية. مجموعة الأعداد الصحيحة (بما في ذلك الأعداد السالبة) مع عملية الجمع تُشكل زمرة غير منتهية.

من المثير للاهتمام الإشارة أنه يمكن أن تتكون زمرتين من مقادير مختلفة وتشتمل على عمليات مختلفة، لكن تبقى لديهما نفس البنية. ومن باب المصادفة، الزمرتين اللتين رأيناهما قبل قليل، مثال على ذلك. في مثالنا عن نمط الساعة أعلاه، إضافة ساعة واحدة يتوافق مع تحويل عقرب الساعة باتجاه عقارب الساعة بإثنا عشر من التحويلات (مضاعفات الـ12)– ما يوافق 30 درجة في المثال الآخر. إضافة b ساعة يتوافق مع تحويل عقرب الساعة بمقدار b من الإثنا عشر من التحويلات الكاملة– ما يوافق $30\times b$ درجة. في الواقع، عناصر نمط الساعة (الأعداد 1 إلى 12) تتصرف في إطار مجموع المودولو الخاص بها، تماما بنفس طريقة تصرف عناصر زمرة دوران مضلعنا من الـ12– ضلع في إطار فكرتنا عن المجموع. إذا كان، في نمط زمرة الساعة $a+b=c$ ، وبالتالي فأنت تعلم على الفور أنه وفي زمرة الدوران، فان الدوران بمقدار $30\times a$ درجة يليه دوران بمقدار $30\times b$ درجة يعطينا دوران بمقدار $30\times c$ درجة. والعكس بالعكس، الزمرتين تميل إلى أن تكونا متساويتي الشكل *(تشاكل تقابلي).* غالبا ما يجد علماء الرياضيات أن الزمرة التي تنشأ في سياق واحد هي متشاكلة تقابليا إلى زمرة أخرى من سياق مختلف تماما.

وهذا هو السبب في أن يكون هناك معنى من وراء التفكير في الزُمر. لا بوصفها تركيبات من الدورانات أو الأعداد أو نوع معين آخر من المقادير، لكن بوصفها تجميع لمقادير مجردة (يمكننا استخدام الحروف للدلالة على هذه المقادير) والتي تُدمج بطريقة محددة في إطار عملية ثنائية. يمكنك تتبع كيفية الدمج في جدول، من مثل الجدول الموضح على اليسار. لنرى نتيجة مجموع $f+g$ ، علينا إيجاد الخلية (الخانة) التي تتوافق مع الصف f والعمود g. والتي تعطينا h ومنه $f+g=h$. الرمز e في هذا الجدول يتعلق بمُحايد الزمرة.

x	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	h	e	f
h	h	g	f	e

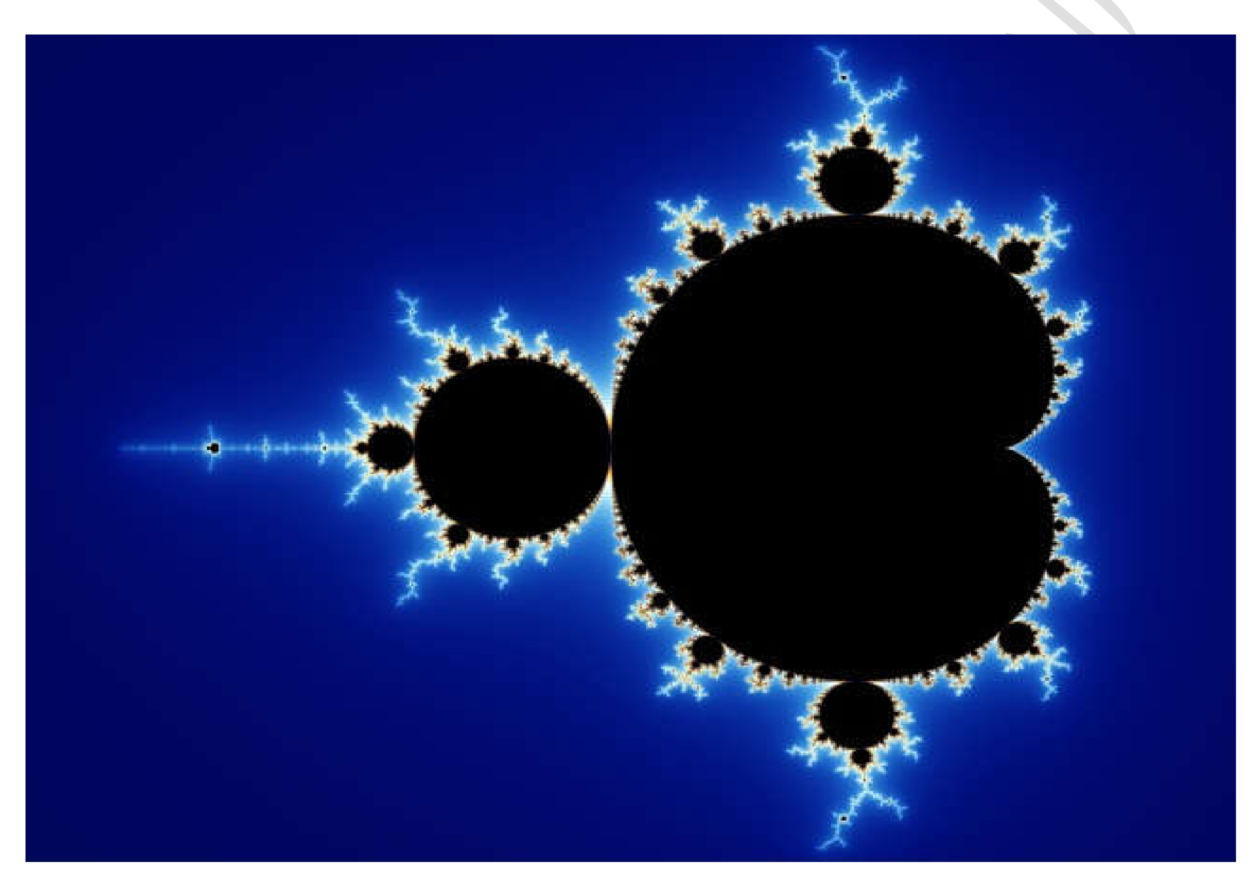
الزمرة التي يصفها هذا الجدول تُعرف بـ: *كلاين 4–كروب* . وهي تشاكل تقابلي لزمرة التناظر (التماثل) في المستطيل، نكتب e من أجل التناظر المُحايد (فعل لا شئ)، f من اجل الانعكاس في المحور الأفقي، g من أجل الانعكاس في المحور العمودي و h من أجل الدوران

بـ180 درجة. باستخدام هذا التمثيل المُجرد، باستطاعتك وصف زُمر متشاكلة تقابليا، حتى وان كانت تنشأ في سياقات مختلفة جدا، دفعة واحدة . وهذه هي قوة التجريد !

****

الاتصال الموضعي

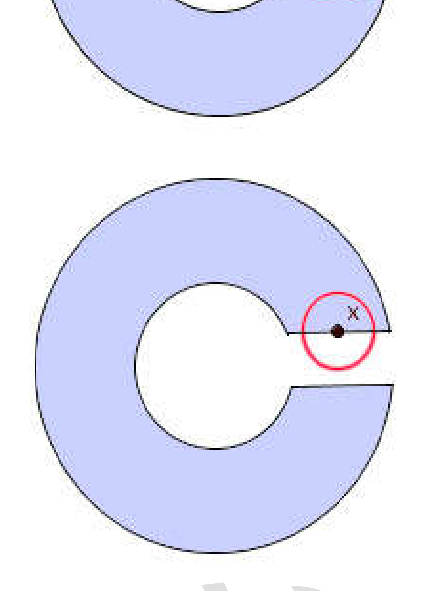
(Local connectivity)



مجموعة ماندلبروت

نحن نعلم أن هناك أشكال في المستوي، خطوطها العريضة مُجعدة بشكل لا يُعقل. من الأمثلة على ذلك الفركتلات (الكُسيريات)، مثل مجموعة *ماندلبروت* الشهيرة. لكن كم هي درجة التعقيد والتركيب التي قد يكون عليها الشكل؟

مفهوم واحد يستحوذ على فهمنا بعض مواطن التجعُد في الشكل أو على الأصح مواطن النقص فيه، *هو الاتصال الموضعي*. لفهم الاتصال الموضعي، عليك التفكير أولا في شكل بسيط نسبيا، مثل الموضح في الرسم على اليسار (نسميه S). اختر نقطة x جزئية من S – للتوضيح سنختار نقطة تقع على خطوطه العريضة– الآن ارسم قرص صغير V، تقع x في مركزه وركز البحث على تقاطع S و V .

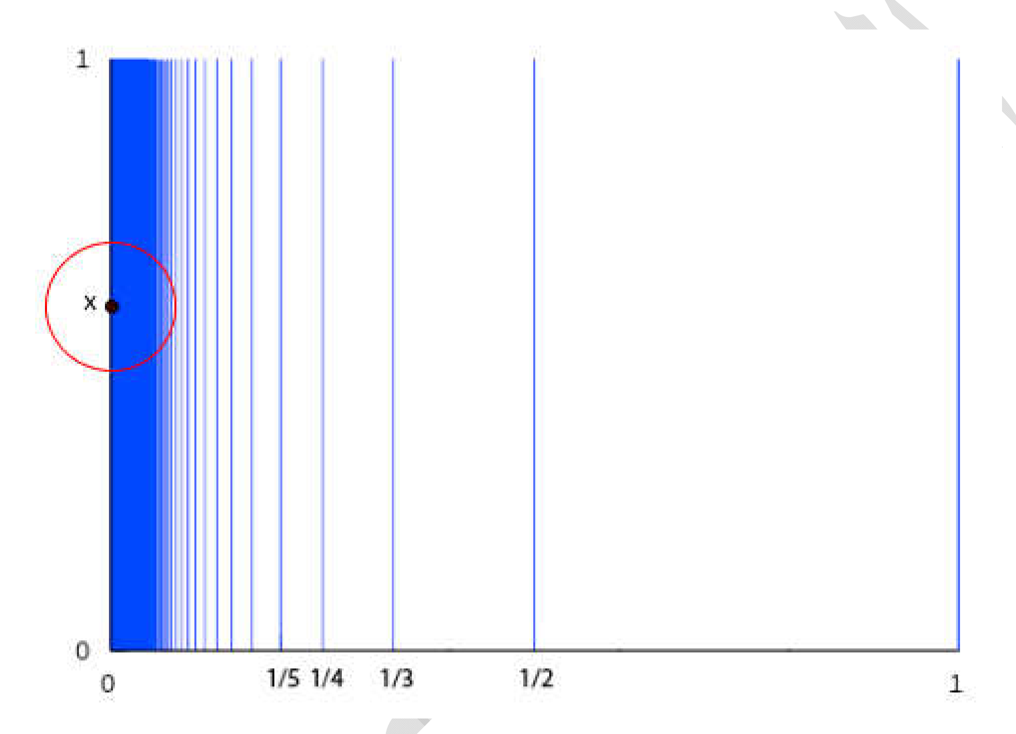


وكما هو موضح بالرسم. قد يحدث أن يتكون التقاطع من أكثر من *مكونة موصولة* واحدة. في مثالنا هذا يحدث لأن الخطوط العريضة لـ S تنحني حول القرص V ثم تعيد الدخول للقرص V مرة أخرى في موضع بعيد ما عن x. ومع ذلك، هذا فقط لأننا اخترنا V أن يكون كبيرا جدا. بواسطة جعل V أصغر يمكننا ضمان أن يكون تقاطع S و V يتكون فقط من مكونة موصولة واحدة. الشكل S (المرسوم في المستوي) *مُتصل موضعيا* في x إذا كان تقاطع القرص V (مركزه عند x) يتكون من مكونة موصولة واحدة من أجل جميع الأقراص التي أنصاف أقطارها صغيرة بما يكفي.

شكل S هو شكل مُتصل موضعيا، إذا كان مُتصل موضعيا عند كل نقاطه. كل الأشكال الواضحة التي قد تخطر ببالك –الدوائر، المربعات، المثلثات– متصلة موضعيا. التعريف الاصطلاحي:
في فضاء طوبولوجي عام S نقول أن S مُتصل موضعيا إذا كان من أجل كل النقاط x في S والجوارات المفتوحة V لـ x، هناك جوار مُتصل مفتوح U لـ x مُحتوى في V – أي موجود داخله–

كيف يمكن لشكل ألا يكون مُتصلا موضعيا؟ من الأمثلة *فضاء المشط*. فكر في المسافة المُغلقة $[0,1]$ (مُغلقة تعني أنها تحتوي على نهاياتها). الآن عند كل نقطة من الشكل $\frac{1}{n}$ حيث n عدد طبيعي، نُنشئ عمود رأسي بطول 1. نُنشئ أيضا من مثل هذا العمود عند أقصى نقطة من يسار المسافة $[0,1]$، أي عند النقطة 0. وبالتالي يصبح لدينا أعمدة رأسية عند 1 و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ وما إلى ذلك.

الآن اختر نقطة x في موضع ما، في أقصى عمود- رأسي على اليسار (لكن ليس عند نقطة تلاقي العمود مع الفاصل الأفقي) وركز البحث على أي قرص V صغير بما يكفي أن لا يشتمل على أي جزء من الفاصل الأفقي. وبما أن هناك عدد لا نهائي من النقاط على الشكل $\frac{1}{n}$ والتي تقترب على نحو كبير من الـ 0 على الفاصل الأفقي، القرص V سيشتمل (يحتوى) على جزء من كل عمود من هذه الأعمدة المنفصلة الرأسية اللانهائية، يبقى هذا صحيح لأي مدى صغر قد يبلغه V. ومنه فان فضاء المشط ليس متصلا موضعيا عند أي نقطة x على أقصى عمود- رأسي في اليسار.



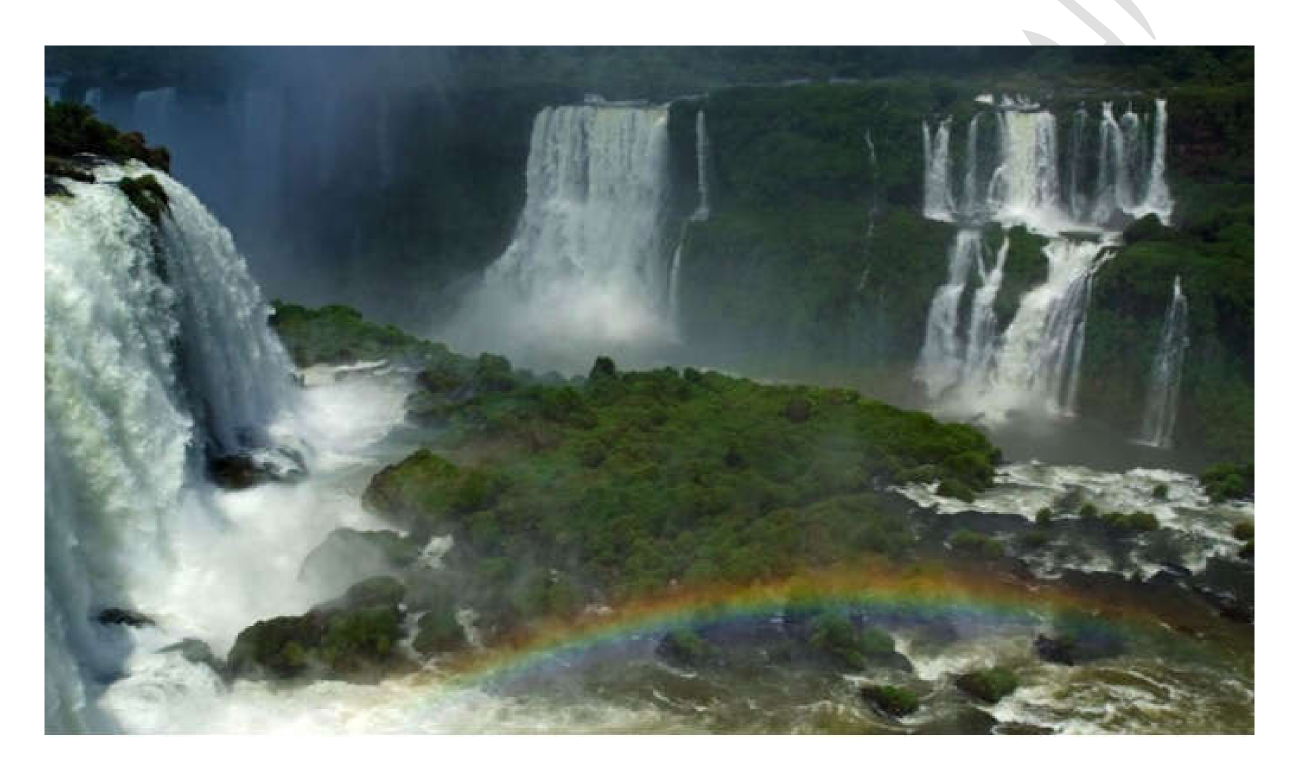
وبالتالي، هل الفركتال المُفضل لدينا، مجموعة ماندلبروت، مُتصلة موضعيا؟ الجواب هو أننا لا نعلم. علماء الرياضيات يعتقدون أنها كذلك، وهم قادرون على إظهار أنها مُتصلة موضعيا عند العديد من نقاطها – لكنهم غير قادرون على إثبات أنها مُتصلة موضعيا عند كل نقاطها.

****

معادلات نافييه – ستوكس

(The Navier–Stokes equations)

الاضطراب دراماتيكي! جميل ويُحتمل أن يكون خطرا. اِنه يحدث في الموائع، فكر في الأمواج المتكسرة والأنهار المتدفقة، فضلا عن الغازات، على سبيل المثال تدفق الهواء حول سيارة أو طائرة. الاضطراب، بحكم طبيعته، وصفه صعب جدا. إذا قمت بقياس سرعة واتجاه تدفق المياه في جريان مضطرب قد تحصل على إجابات مختلفة تماما عند نقاط قد تكون قريبة جدا من بعضها بعضا.



اضطراب المياه: شلالات اجوازو، حدود البرازيل والأرجنتين

بصرف النظر عن هذا التعقيد، يعتقد العلماء أن تدفق السوائل يتم وصفها وفق مستوى معقول من الدقة عن طريق *معادلات نافييه – ستوكس*. عند محاولة وصف حركة سائل أو غاز، ما هي عليه، بعد أن كانت السرعة $v(x,y,z,t)$ والضغط $P(x,y,z,t)$ للمائع عند النقطة(x,y,z) من الفضاء في الزمن t.

معادلات نافييه – ستوكس، التي أخذت اسمها من فيزيائيين هما *كلود لويس نافييه* و *جورج جابرييل ستوكس*، هي مجموعة من المعادلات التفاضلية الجزئية التي ترتبط بالتغييرات في السرعة، التغييرات في الضغط ولزوجة المائع. لإيجاد دوال v و P عليك حل تلك المعادلات.

لكن هذا ليس بالأمر السهل. الحلول المضبوطة للمعادلات– حلول يمكن كتابتها على شكل صيغ رياضياتية– لا يمكن إيجادها إلا في المسائل المبسطة والتي هي إما قليلة أو لا فائدة ملموسة من ورائها. من أجل معظم الأغراض العملية، الحلول التقريبية يتم إيجادها من خلال المحاكاة الحاسوبية – بالاعتماد على براعته في عمل–الافتراضات– التي تتطلب قوة حوسبة هائلة.

لا أحد يعرف فيما إذا كانت الحلول الرياضياتية المضبوطة موجودة فعلا حتى للشكل الأكثر عمومية للمعادلات. وان كانت موجودة، مازلنا لا نعرف فيما إذا كانت تنطوي على شذوذ، كالانقطاعات أو اللانهايات، والتي لا تتوافق مع حدسنا عن الكيفية التي ينبغي للمائع أن يتصرف بها. الجواب على هذا السؤال قد يُكسبك مليون دولار من *معهد كلاي للرياضيات*.

وفيما يلي المعادلات في كامل تألقها:

معادلات نافييه – ستوكس

عند نقطة (x, y, z) في الفضاء، السرعة $v(x, y, z)$ لها ثلاثة مركبات (u, v, w) واحد لكل إحداثية. ضغط المائع هو $P(x, y, z)$ خذ نَفَس عميق. ها هي المعادلات:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

الوسيط Re في المعادلات يُدعى عدد *رينولد* ويقيس لزوجة المائع.

******

التظاهر بالأولية

(Pretend primes)



بيير دي فيرما

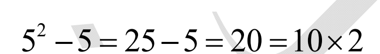
افرض أن لديك عدد أولي p وعدد طبيعي آخر x. وبغض النظر عن قيمة x طالما أنها عدد طبيعي، ستجد أن:

$x^p - x$ من مضاعفات p

هذه النتيجة، تُعرف *بمبرهنة فيرما الصُغرى*، لا للخلط مع *مبرهنة فيرما الأخيرة*

دعنا نجرب المبرهنة الصغرى مع بعض الأمثلة:

لأجل $p = 2$ و $x = 5$ لدينا:



$$5^2 - 5 = 25 - 5 = 20 = 10 \times 2$$

ولأجل $p = 3$ و $x = 3$ لدينا:

$$2^3 - 2 = 8 - 2 = 6 = 2 \times 3$$

ولأجل $p = 7$ و $x = 11$ لدينا:

$$11^7 - 11 = 19.487.171 - 11 = 19.487.160 = 2.783.880 \times 7$$

بإمكانك تجربتها لأجل قيم أخرى لكل من p و x.

ذكر فيرما أول نسخة من هذه النظرية في رسالة عام 1640، كما هو الحال مع مبرهنته الأخيرة، كان غامضا قليلا فيما يخص الإثبات:

"...الإثبات على الذي أود أن أرسله إليكم، إن لم أكن أخشى أن يكون طويلا جدا."

ولكن خلافا مع مبرهنة فيرما الأخيرة، الإثبات تم نشره في وقت قريب نسبيا، في 1786 من *قبل ليونارد أويلر*.

لكن هل مبرهنة فيرما الصغرى تعمل في الاتجاه المعاكس؟ إذا كان لديك عدد طبيعي n إذن لسائر الأعداد الطبيعية x نجد: $x^n - x$ من مضاعفات n.

وهذا يعني أن n هو عدد أولي ؟

إذا كان هذا صحيحا، إذن يمكن أن نستخدم نظرية فيرما الصغرى. للتحقق من ما إذا كان عدد مُعطى n عدد أولي: انتقاء مجموعة من الأرقام الأخرى عشوائيا، ولكل منها نتحقق ما إذا كان:

$x^n - x$ من مضاعفات n

إذا وجدت x لأجله هذا ليس صحيحا، إذن أنت تعلم بالتأكيد أن n ليس أوليا، إذا لم تجد واحدا، وقمت بالتحقق من العديد من x بما فيه الكفاية، يمكنك أن تكون متأكدا تماما أن n هو عدد أولي، هذه الطريقة تُدعى *اختبار فيرما لأولية عدد ما*.

للأسف، إنها لا تعمل تماما بكل ما في وسعها. في عام 1885عالم الرياضيات التشيكي *Václav Šimerka* *(فكلاف سيميركا)* اكتشف أعداد لا أولية تتنكر كأولية عندما يتعلق الأمر بمبرهنة فيرما الصغرى. العدد 561 هو أصغرها. هو ليس عدد أولي، لكن لسائر الأعداد الطبيعية x لدينا:

$x^{561} - x$ من مضاعفات 561

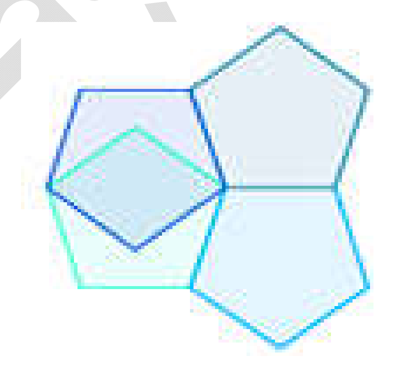
اكتشف Šimerka أيضا أن 1105، 1729، 2465، 2821، 6601، 8911 تتصرف بنفس الطريقة، الأعداد الطبيعية غير الأولية لكنها تحقق العلاقة الواردة في مبرهنة فيرما الصغرى. أحيانا تُدعى *شبه الأعداد الأولية* (*pseudoprimes*) نظرا لأنها تؤدي عملا جيدا في التصرف كالأعداد الأولية، أو *أعداد كارميكائيل*. على اسم الأمريكي روبرت كارميكائيل الذي وجد وبشكل مستقل أول عدد 561 في 1910. يمكنك أن ترى من الأعداد السبعة الأولى المذكورة أعلاه أن أعداد كارميكائيل ليست وفيرة جدا، هناك عدد لانهائي منها. الواقع أنها لم تثبت حتى سنة 1994. ولكنها ضئيلة جدا.

في الواقع، تتضاءل كلما تحركت على خط الأعداد، إذا أحصيت أعداد كارميكائيل بين 1 و 10^{21} ستجد أنه لا يوجد سوى حوالي عدد واحد في 50 تريليون.

أعداد كارميكائيل تعيق اختبار فيرما لأولية عدد ما، إلى حد ما، ولكن ليس إلى الحد السيئ للغاية الذي قد يجعلها غير صالحة للاستعمال، وهناك نسخ معدلة للاختبار تعمل بشكل جيد جدا.

****

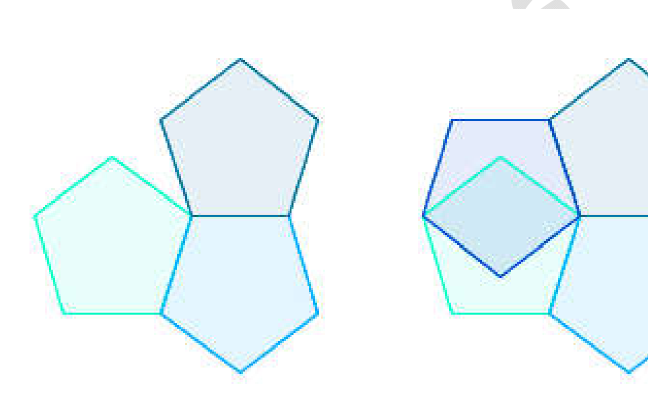
مشاكل التبليط
(Tiling troubles)



من بين جميع المضلعات المُنتظمة هناك ثلاثة فقط يُمكنك استخدامها لتبليط جدار: المربع، المثلث متساوي الأضلاع والسداسي المنتظم. البقية لا تتناسب مع بعضها بعضا.

من السهل إثبات ذلك. المضلع المنتظم مع n وجه له من الزوايا الداخلية ما يساوي $180(\frac{n-2}{n})$ درجة

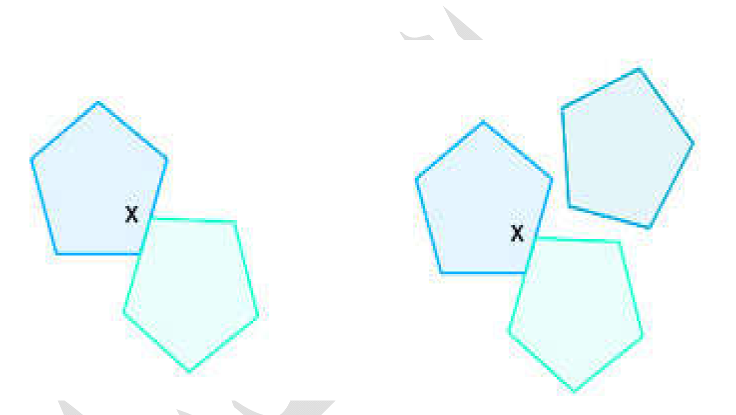
افرض أنك تحاول التبليط عن طريق تركيب نسخ عديدة، ولنقل k من النُسخ، حول نقطة بحيث تلتقي جميعها عند زاوية (أنظر للصورة على اليسار). إذن مجموع زوايا k يجب أن يكون 360 درجة. إذا كان مجموعها أقل سيكون هناك فجوة، وإذا كان مجموعها أكبر إذن نُسخ المضلعات ستتداخل



إذن نحتاج $k \times 180(\frac{n-2}{n}) = 360$ والذي يعني أن $k = \frac{2n}{n-2}$

الصيغة على الجانب الأيمن بالإمكان إعادة صياغتها لتعطينا $k=\frac{4}{n-2}+2$

وبما أن k عدد تام (عدد نسخ المضلع التي سيتم تركيبها مع بعض) هذا يعني أن $(\frac{4}{n-2})$ يجب أن يكون عدد تام. وبالتالي $(n-2)$ يمكن أن تكون مُساوية فقط لـ 4، 2 و 1، والذي يعني أن n يمكن أن تكون مُساوية فقط لـ 6، 4 و 3.



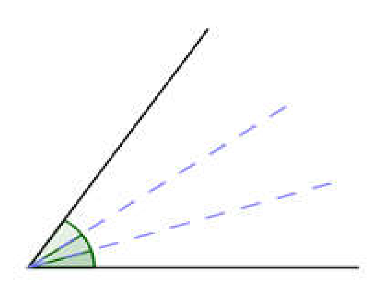
يمكنك أيضا محاولة التبليط بحيث زاوية المضلع لا تلتقي بالضرورة مع زاوية النسخة المجاورة لها، لكن تتوضع عند نقطة x على طول النسخة المجاورة. هذه النسخة المجاورة يجب بناءا عليه أن يكون لها زاوية داخلية من 180 درجة عند x (على اعتبار أن x تقع في داخل أحد جوانبه). من أجل التبليط يجب عليك ملء الـ 180 درجة المتبقية بنسخ k من المضلع، إذن تحتاج $k\times180(\frac{n-2}{n})=180$

باستخدام حجة مُمَاثلة على النحو الوارد أعلاه يمكنك أن تثق أن هذا يعمل فقط عندما تكون $n=3$ أو $n=4$.

****

تثليث الزاوية
(Trisecting the angle)

واحدة من أكثر المشاكل شهرة في تاريخ الرياضيات هي كيفية تقسيم زاوية مرسومة على قطعة من الورق إلى ثلاثة أجزاء متساوية فقط باستخدام الفرجار وحافة مُستقيمة (مسطرة من دون علامات). بالطبع، يمكنك قياس أي زاوية مُعطاة باستخدام المنقلة، تقسيم العدد



هل تستطيع تقسيم زاوية كيفية الى ثلاثة أجزاء متساوية فقط باستخدام مسطرة وحافة مستقيمة؟

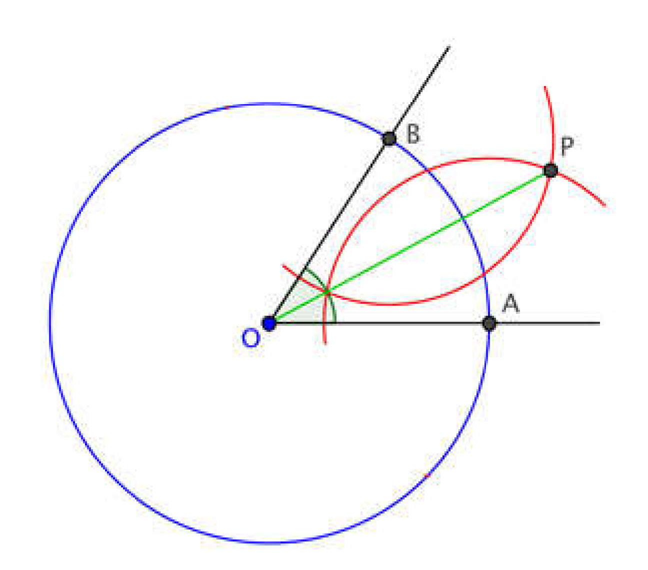
الذي تحصل عليه على 3، ومن ثم تحديد الثُلث المطلوب من الزاوية باستخدام المنقلة مرة أخرى. لكن المقصود هنا أن المنقلة محظورة– مسموح لك فقط بفرجار وحافة مستقيمة–. المسألة تعود إلى اليونانيين القدماء، الذين أنجزوا العديد من هندستهم باستخدام هاتين الآداتين فقط.

للحصول على لمحة عن كيف يمكنك حل هذا النوع من المسائل. لنبدأ بتقسيم زاوية مُعطاة إلى قسمين متساويين، بدلا من ثلاثة.

تنصيف زاوية

مع خطين يلتقيان في نقطة O، يُمكنك تنصيف(شطر) الزاوية بينهما كالآتي: ضع رأس الفرجار على O وارسم دائرة (وفق أي نصف قطر تريده). وهي الدائرة الزرقاء في الرسم التوضيحي. الدائرة ستقطع الخطين في نقطتين: ندعوها A و B. كما هو موضح أدناه.

الآن ضع رأس الفرجار على A وارسم قوس من دائرة، كما هو مبين في الرسم التوضيحي.



تنصيف زاوية

من دون تغيير نصف قطر الفرجار. انقل رأسه إلى B وارسم قوس آخر من دائرة. وهي الأقواس الحمراء في الرسم التوضيحي. النقطة أين يتقاطع القوسان باللون الأحمر، P، نستطيع أن نصلها مع O باستخدام حافة مستقيمة (الخط الأخضر). الزاوية POB هي بالضبط نصف الزاوية AOB . (إذا لم تتقاطع الأقواس الحمراء، فأنت في حاجة إلى دوائر أكبر!). بالإمكان إثبات أن هذه الطريقة تُنَصف أي زاوية. يمكنك تجربة ذلك بنفسك (استخدم مثلثات متماثلة).

تثليث زاوية

ماذا عن تقسيم زاوية إلى ثلاثة أجزاء متساوية؟ لماذا هو أمر صعب جدا؟ هناك عدد قليل من الحالات الخاصة للزوايا أين يمكننا القيام بذلك– على سبيل المثال إذا كانت الزاوية تساوي $\frac{\pi}{2}$ راديان أو 90 درجة. يُمكنك تثليث أي زاوية إذا سمحت لنفسك أن تستخدم بُعدا إضافيا. يمكنك أيضا تثليث زاوية كيفية بأن تستخدم مسطرة، بدلا من حافة مستقيمة عادية، بحيث يمكنك قياس المسافات. ومع ذلك، لتلعب وفق القواعد، لا يُسمح لك بأي علامات على الحافة المستقيمة مُطلقا– يجب أن تكون خالية تماما.

ظلت إشكالية ما إذا كان بالإمكان تثليث زاوية، لغزا رياضياتيا لآلاف السنين– لم يُحل إلى غاية 1837 أين تم إثبات أنها مستحيلة بواسطة *بيير وانتزل*، عالم الرياضيات الفرنسي والخبير في علم الحساب. وكان هذا انجازا عظيما لرجل في سن الـ 23، الذي توفي بعد ذلك بشكل مأساوي في سن صغير 33 سنة

إذن لما هي مستحيلة؟ أظهر "وانتزل" أن مشكلة تثليث زاوية تُعادل حل معادلة تكعيبية باستخدام بُنية حافة مستقيمة–و–مسطرة. كما أظهر أيضا أنه يمكن حل عدد قليل فقط من المعادلات التكعيبية بهذه الطريقة– الغالبية لا تستطيع ذلك. وهكذا استخلص أن معظم الزوايا لا يُمكن تثليثها.

لا تيأس أبدا

منذ إثبات وايتزل ونحن نعلم على وجه اليقين أنه لا يُمكن تثليث زاوية كيفية باستخدام مسطرة وحافة مستقيمة، لكن هذا لم يمنع الناس من المحاولة. هنا في Plus نتلقى بانتظام رسائل بريد الكتروني من أشخاص يعتقدون أنهم قد كسروا المشكلة. وغني عن القول، أن جميع هذه الإثباتات– كما تُدعى– تحتوي على عيوب. لكن هناك بعض الطرق لتثليث زاوية، إذا قُمت بتغيير القواعد قليلا.

****

أسهل 11

(Easy 11)

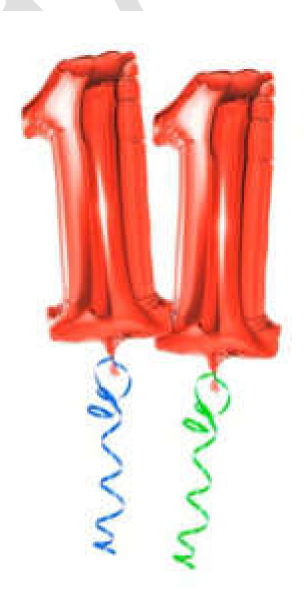
جُداء 11 مع عدد موجب a أقل من 10 أمر سهل، النتيجة ببساطة هي a مُكرر، مثال:

$22 = 2\times 11$

$33 = 3\times 11$

$44 = 4\times 11$

وهكذا...



أغلب الناس يعرفون هذا، لكن مالا يعرفه الكثيرون، أن هناك أيضا خُدعة مُتقنة لحساب جُداء أعداد كبيرة مع 11، افرض أن a عدد من رقمين، لانجاز الجُداء $a\times 11$ ببساطة أنجز مجموع أرقام a، وأسقط هذا المجموع بين الأرقام، على سبيل المثال، نعتبر $a = 23$ مجموع أرقامه هو $5 = 2+3$، إسقاط هذا المجموع بين الأرقام يعطينا 253، والذي هو في الواقع مُساوي لحاصل 23×11

هناك فقط تحذير واحد صغير، إذا كان مجموع أرقام a هو 10 أو أكبر، أنت في حاجة إلى حمل رقم، بعبارة أخرى، ضع الرقم الأيمن للمجموع بين الأرقام الأصلية وأضف الرقم الأيسر للمجموع للرقم الأيسر للعدد الأصلي، على سبيل المثال، إذا كان $a = 75$ ومنه فان مجموع أرقامه 12 نضع 2 بين الأرقام الأصلية 7 و 5 ونضيف 1 إلى 7 لنحصل على 825 والتي هي أيضا النتيجة الصحيحة.

بإمكانك أن تثق أن هذه الحيلة دائما تعمل باستخدام جُداء طويل.

افرض أن أرقام a هي x و y إذن xy الجُداء الطويل الآن يخبرنا أن:

$$\begin{array}{rrrrr} & x & y & \times & 1\ 1 \\ \hline = & & x & y & 0 \\ & + & & x & y \end{array}$$

ومنه يمكن تتبع النتيجة بسهوله.

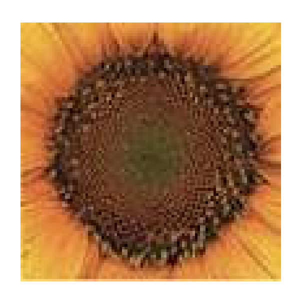
بإمكانك انجاز الخدعة لأجل أعداد a من أكثر من رقمين، كمساعدة هذا جُداء طويل عندما تكون أرقام a هي $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ هي كالآتي:

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & . & . & . & x_n & \times & 1 & 1 \\ \hline = & & x_1 & x_2 & x_3 & . & . & x_n & 0 & \\ & + & & x_1 & x_2 & . & . & x_{n-1} & x_n & \end{array}$$

****

الكسور المُستمرة

(Continued fractions)



الكسر $\frac{22}{7}$ هو تقريب جيد للعدد غير الكسري π لدرجة أنه هو الذي يُحتفل به في *يوم تقريب باي* في 22 جويلية. لكن هل تساءلت يوما ما عن كيفية حساب تقريب كسري لأعداد غير كسرية؟

الجواب يأتي من الكسور المُستمرة: وهي سلسلة متداخلة من الكسور التي يمكن أن تكشف عن الخصائص الخفية للأرقام. أي عدد يمكن كتابته ككسر مُستمر. الأعداد الحقيقية (بما في ذلك الأعداد الصحيحة) يُمكن أن تُكتب ككسور مُستمرة مُنتهية، على سبيل المثال:

$$3 = 3$$

(والذي على نحو لا يمكن إنكاره تبدو غير مثيرة للاهتمام !)

$$\frac{22}{7}=3+\frac{1}{7}$$

$$\frac{333}{106}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}}=3+\frac{15}{106}$$

الأعداد غير الكسرية تملك كسورا مُستمرة لانهائية، قطعها بعد عدد محدود من المستويات يُعطينا كسورا قريبة من قيمة العدد غير الكسري. الكسور أعلاه هي أول بضعة تقريبات إلى π تُحسب من قطع سلسلة كسورها غير المُنتهية:

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\dots}}}}$$

الكسر $\frac{p}{q}$ هو تقريب جيد للعدد غير الكسري x إذا لم يكن هناك كسر أقرب إلى x مع قاسم أصغر q.
تمديد الكسر المُستمر للعدد غير الكسري يُعطي أفضل سلسلة من التقريبات في هذا السياق للعدد غير الكسري

أول بضعة تقريبات لـ π تم إنتاجها بهذه الطريقة:

$$3,\frac{22}{7},\frac{333}{106},\frac{355}{113},\frac{103993}{33102},\dots$$

بسرعة جدا نقترب من القيمة الحقيقية لـ π حاصل طرحهم من π هو بالتقريب:

$$0.141,\ 0.001,\ 0.0008, 0.0000003,\ 0.0000000006,\dots$$







إذا قُمت بحساب منحنيات البذور المُتصاعدة في عباد الشمس ستجد زوجا(عد التقوسات المنحنية إلى اليسار ثم المنحنية إلى اليمين) ستكون (على الغالب) قريبة من سلسلة فيبوناتشي، كلها تقريبات لـ ϕ (الرمز يدعى فاي)

لكن ليست كل التقريبات تعمل جيدا من أجل الأعداد غير الكسرية. على سبيل المثال التقريبات من الكسر المُستمر لقيمة $\phi = 1.618...$ (نهاية نسبة تعاقب أرقام فيبوناتشي) هي:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},...$$

هذه التقريبات، على الرغم من أنها الأفضل، تقترب من القيمة الحقيقية لـ ϕ ببطء شديد، مع فارق يدور حول 0.618, 0.381, 0.118, 0.048 و 0.018 من أجل هذه القائمة أعلاه.

الأعداد غير الكسرية مع مثل هذه التقريبات عديمة الجدوى تُدعى "*سيئة التقريب*" يمكنك وصف شيء على أنه "سيء التقريب" إذا كانت الأرقام في كسره المُستمر محدودة (لا تتخطى على الإطلاق عدد ثابت) وهذا مقياس لمدى اللاكسرية. في الحقيقة ϕ، هو أشهر عدد غير كسري، مع أعداد في كسره المُستمر لا تتجاوز 1 كما هو مُبيَن أدناه.

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}}$$

الكسر المُستمر لـ ϕ يكشف عن نمط جميل، على الرغم من حقيقة أنه (وكل الأعداد غير الكسرية) يوجد به فوضى من تمديدات عشرية لانهائية والتي لا توصلنا إلى أي أنماط مُتكررة. الكسور المُستمرة لأعداد غير كسرية أخرى مثل $\sqrt{2}$ أيضا يكشف أنماط مخفية.

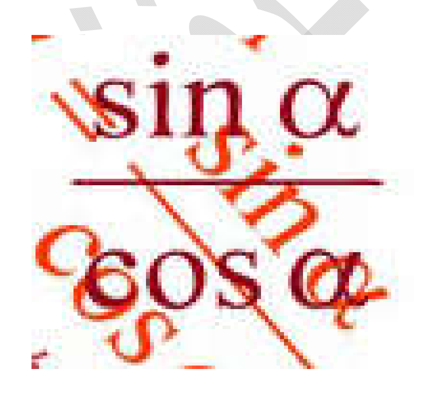
$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + ...}}}$$

هذه الأنماط جميلة، لكن نتيجة هذه الأعداد ستكون "سيئة التقريب". لكن π مع تقريباته الكسرية الممتازة، لا يحمل أي نمط في كسره المُستمر.

****

قوة القوى
(The power of powers)

هل تشعُر بالملل من حل المعادلات من الدرجة الثانية؟ لا يُمكن أن تكون انزعجت من المُربعات؟ إذن انه الوقت للانتقال للانهاية – والاندهاش من الواقع أن العديد من الدوال التي سوف نحللها، يُمكن التعبير عنها باستخدام مجاميع لانهائية مُرَكبة من قوى x فقط.



وهناك مثال عظيم يتمثل في الدوال المثلثية الجيب *sine* وجيب التمام *cosine*. والتي اتضح أنه يمكن التعبير عنها على النحو التالي:

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...$$

حيث: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$. وفي كلا السلسلتين يستمر النمط الجميل على نحو لانهائي، باختيار قيمة معينة من أجل x سوف تجد أن السلسلة اللانهائية تتقارب نحو $cos(x)$ و $sin(x)$ على التوالي.

وبالمثل سلسلة جميلة يمكن استخدامها للتعبير عن الدوال الأسية e^x واللوغاريتم الطبيعي $ln(x)$ كالآتي:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

$$ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} + ...$$

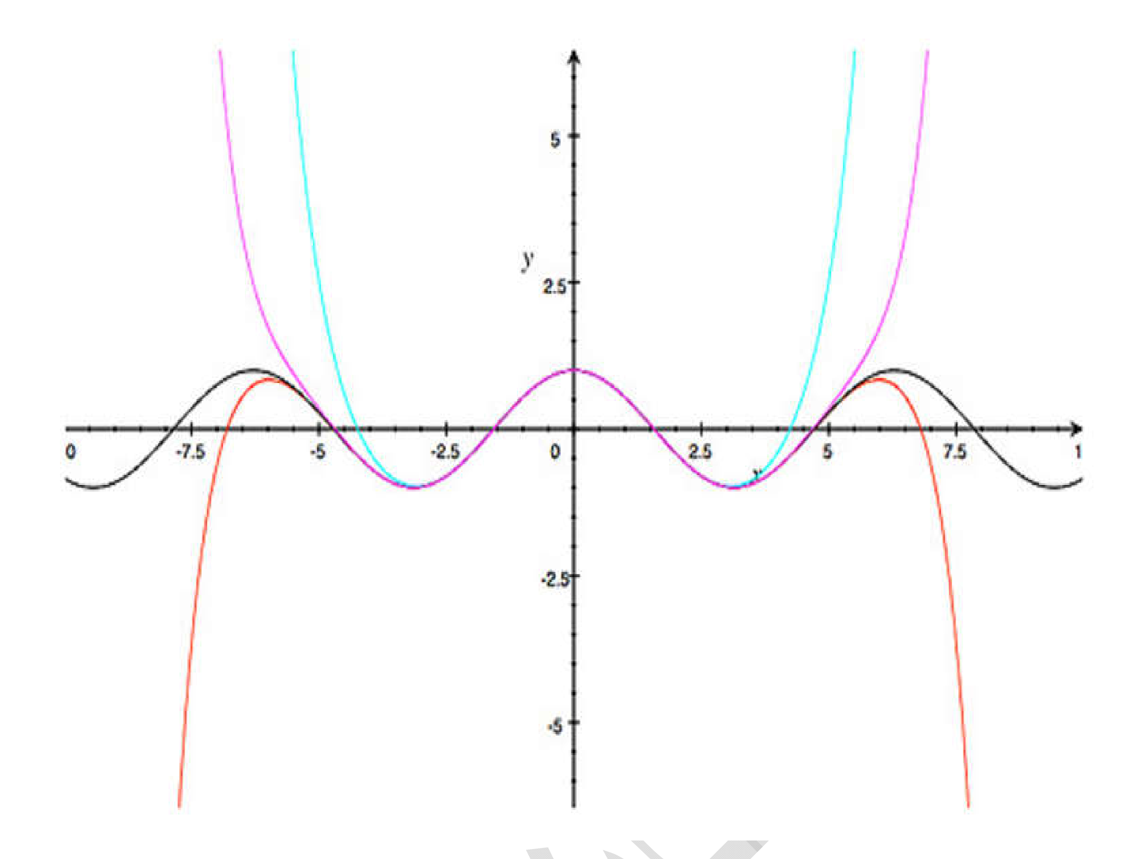
مع العلم أنه في حالة اللوغاريتم هذه الصيغة تسري في حالة: $0 < x \leq 2$

دوال أخرى أيضا يُمكن التعبير عنها باستخدام سلاسل قوى، تُدعى أيضا "*سلسلة تايلور*"، وهو أمر مُفيد جدا: على سبيل المثال، بالإمكان تقريب قيمة أي من الدوال أعلاه عند x ببساطة عن طريق انجاز الصيغ القليلة الأولى من سلسلة القوى.

على سبيل المثال، إذا كانت آلتك الحاسبة لا تتضمن على زر جيب التمام *cosine* وتريد انجاز $cos(1)$ بإمكانك تقريبها كالآتي:

$$cos(1) \approx 1 - \frac{1^2}{2 \times 1} + \frac{1^4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \approx 0.54$$

الصورة الموالية توضح كيف أن الرسوم البيانية للدوال المُتحصل عليها من الصيغ القليلة الأولى من سلاسل القوى لدالة جيب التمام *cosine* تُقارب الرسم البياني لدالة جيب التمام نفسها.



المنحنى باللون الأسود هو الرسم البياني لدالة جيب التمام $cos(x)$ والمنحنى الأزرق السماوي هو الرسم البياني للآتي:

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$$

والمنحنى الأرجواني هو الرسم البياني للآتي:

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\frac{x^{12}}{12!}$$

والمنحنى الأحمر هو الرسم البياني للآتي:

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\frac{x^{12}}{12!}-\frac{x^{14}}{14!}$$

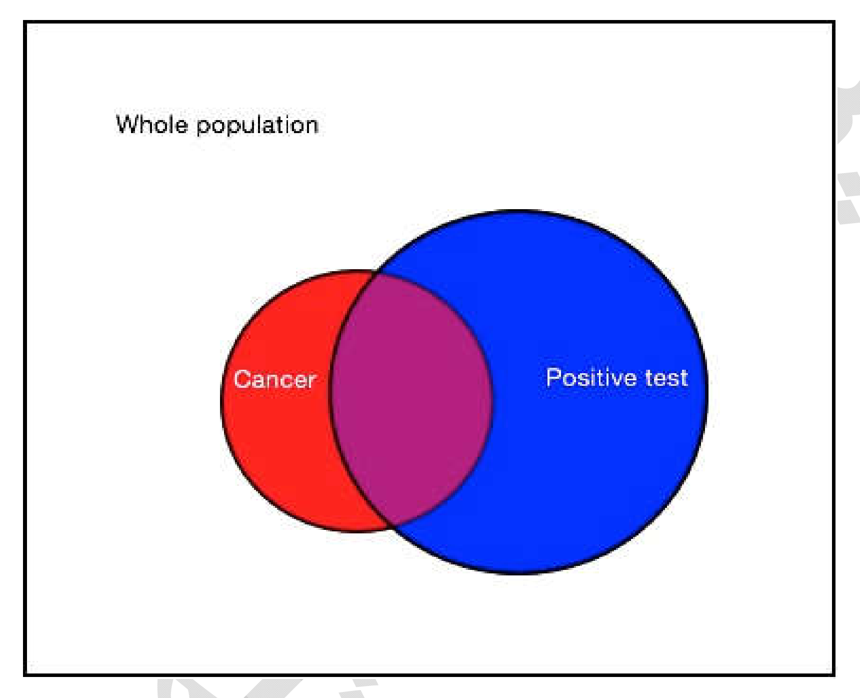
****

مبرهنة بايز

(Bayes' theorem)

لنفرض أن نوع معين من السرطان يصيب 1% من مُجتمع ما. هناك اختبار فحص لهذا النوع من السرطان لكنه غير مثالي: على الرغم من أنه يعطي نتيجة ايجابية لـ90% من الأشخاص المُصابين بالسرطان، هو أيضا يعطي نتيجة ايجابية لـ5% من الأشخاص غير المُصابين بالسرطان. لقد تلقيتَ للتو نتيجة اختبار فحص ايجابية – ما هو احتمال أن لديك سرطان؟

الكثير منا سيقول أن هناك الآن فرصة 90% أن أكون مُصاب بالسرطان. لكن هذا غير صحيح– فُرَصُتك أقرب إلى 15% . من أجل أن نفهم لما علينا أن نُطالب *باحتمالات مشروطة* ونتيجة عملية جدا: *مُبرهنة بايز*.



الاحتمال الشرطي هو احتمال أن شيئا واحدا هو الصحيح (في هذا المثال، أن يكون لديك هذا النوع من السرطان) نظرا لأن شيئا آخر صحيح (نتيجة اختبار الفحص الخاصة بك ايجابية). في مثالنا سنكتب الاحتمال الشرطي لوجود هذا النوع من السرطان نظرا لأن نتيجة اختبار الفحص ايجابية كالآتي $P(cancer / positive)$

قبل اجتيازك لاختبار الفحص، كنت تعتقد أن احتمال إصابتك بهذا النوع من السرطان هي $P(cancer) = 0.01$. إذن، في مجتمع من 10.000 شخص، أنت تتوقع أن من بينهم 100 مُصاب بهذا النوع من السرطان. هذه المجموعة من الأشخاص مُمثلة بدائرة حمراء في الصورة.

الآن أنت لديك نتيجة اختبار فحص ايجابية. كم عدد الأشخاص من مجتمع من 10.000 سيكون لدية نتيجة اختبار فحص ايجابية– مُمثلة بدائرة زرقاء في الصورة؟

هناك فرصة 90% لنتيجة اختبار فحص ايجابية إذا كُنتَ مُصابا بالسرطان. في مثالنا مُجتمع من 10.000 شخص، 90 من 100 شخص مُصاب بهذا السرطان سيتلقى نتيجة اختبار فحص ايجابية. هؤلاء الأشخاص يتموضعون في تقاطع الدائرتين الزرقاء والحمراء.

وهناك فرصة 5% بأنك لا تزال تتحصل على نتيجة اختبار فحص ايجابية إذا كنت غير مُصاب بالسرطان- هؤلاء الأشخاص يتموضعون في الدائرة الزرقاء التي هي خارج الدائرة الحمراء في الصورة. إذن من أجل 9.900 من المرضى غير المصابين بالسرطان في هذا المجتمع، 495 سيتلقون بشكل خاطئ نتيجة اختبار فحص ايجابي. هذا يُعطينا ما مجموعه $90+495=585$ شخص من كل 10.000 شخص يُتوقع أن يحصلوا على نتيجة اختبار ايجابية.

إذا ما هو $P(cancer/positive)$، احتمال أنك مُصاب بهذا النوع من السرطان، نظرا لأن لديك نتيجة اختبار فحص ايجابية؟ هذه هي نسبة الأشخاص المُصابون بالسرطان ولديهم نتيجة اختبار فحص ايجابية (تقاطع الدائرتين) من كل الأشخاص الذين لديهم نتيجة اختبار ايجابية (الدائرة الزرقاء) : $\frac{90}{585}=0.154$

أو مكتوبة بصيغ الاحتمالات:

$$P(cancer/positive)=\frac{P(cancer)P(positive/cancer)}{P(positive)}=\frac{0.01\times0.9}{0.0585}=0.154$$

أين $P(positive/cancer)$ هو احتمال الحصول على نتيجة اختبار فحص ايجابية نظرا لأنك مُصاب بالسرطان.

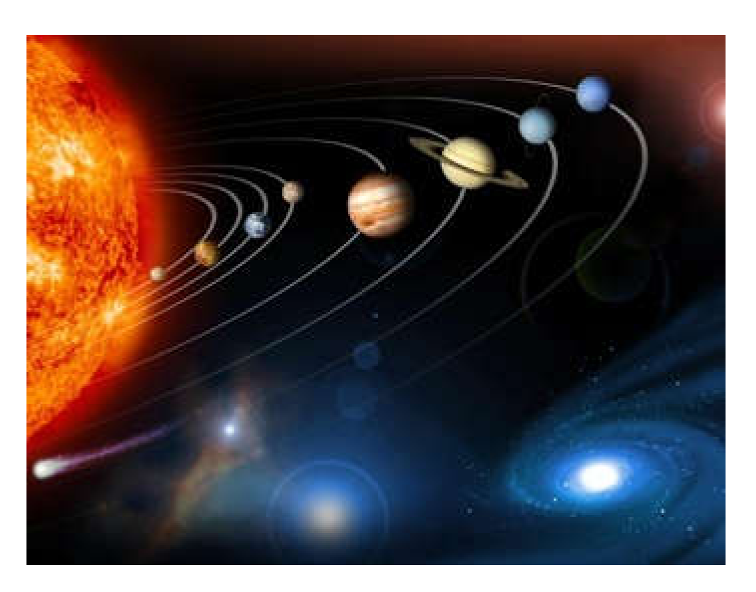
إذن فُرصتك للإصابة بهذا النوع من السرطان نظرا لحصولك على نتيجة اختبار ايجابية هي أكثر بكثير من 15%. هذه النتيجة تُدعى "مبرهنة بايز". وتُكتب عامة على الشكل الآتي:

$$P(A/B)=\frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}$$

مبرهنة بايز تسمح لك بتحديث اعتقادك السابق (في هذه الحالة، أن فرصة إصابتك بالسرطان كانت 1%) عندما يصبح الدليل الجديد مُتاح: نتيجة اختبار فحص ايجابية.

******

مسائل الـ n–جسم
(n–body problems)



تتحرك الأرض في مدار دائري حول الشمس. حسنا، في الواقع، ليس دائريا لكنه قريب جدا من القطع الناقص الدائري. وهذا أمر يمكنك قياسه من قوانين نيوتن للجاذبية والحركة. وبالمثل، يمكنك حساب حركة أي منظومة من اثنين من الأجرام السماوية تؤثر بجاذبية على بعضها بعضا. كل ما تحتاجه، معرفة كتل الأجسام، سرعاتها الابتدائية ومواضعها. وفقط

ماذا لو كان لديك، ليس مجرد اثنين، لكن ثلاثة، أربعة، أربعة أو أكثر من الأجرام السماوية التي تؤثر بجاذبية على بعضها بعضا؟ ما الذي يمكنك حسابه إذا؟

الجواب هو، ليس بالقدر الكافي، على الأقل ليس على الشكل العام. مسألة تحديد المسارات التي ستتبعها الـ n– جسم خلال جميع الأوقات اللاحقة، تُعرف باسم *مسألة الـ* n–جسم. واتضح أنه عندما تكون قيمة n ثلاثة (3) أو أكثر، مسارات الأجسام عموما تصبح معقدة بشكل مرعب. وقد تم إثبات أنه لا يوجد صيغة رياضياتية دقيقة، قد تصف تلك المسارات.

السبب وراء إمكانية حصولنا على فكرة جيدة عن مدارات الكواكب في مجموعتنا الشمسية هو أن الكواكب صغيرة جدا مقارنة بالشمس مما يعني أن الجاذبية التي تؤثر بها على بعضها بعضا يمكن إهمالها. لاستنباط مسار كوكب معين، يمكنك للحصول على الإجابة، أن تأخذ بعين الاعتبار الجذب القادم من الشمس فقط.

******

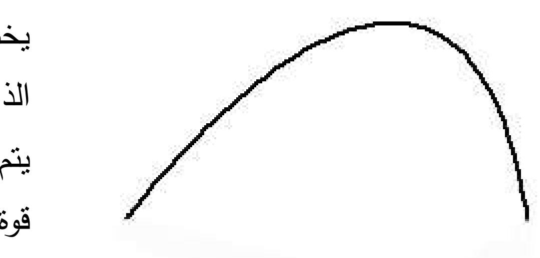
كرة الريشة

(Badminton)



الكرات المُستخدمة في كرة الريشة ليست مثل بقية المقذوفات الأخرى التي نجدها في الرياضة. فهي غير متناظرة إلى أبعد الحدود. مع حافة مخروطية الشكل، حوالي 6 سم طولا و 6 سم موصولة بفلين من كثافة أعلى عند النهاية الضيقة للمخروط. ومع ذلك، عندما يتم ضرب كرة الريشة تنقلب بسرعة بحيث يقود الفلين الحركة لأن مركز ثقله مُختلف عن مركز كتلته. وهذا يضمن أنها دائما ستقترب من خصمك بالاستدارة الصحيحة التي تسمح له بضربها مرة أخرى.

أثر ضرب كرة الريشة غريب. عندما تضرب كرة تنس أو كرة كريكت بمضرب أو هراوة فإنها ستبتعد بحسب الجُهد الذي بذلته أثناء ضربك لها. لكن مهما كان الجهد الذي بذلته أثناء ضربك لكرة الريشة فإنها لن تبتعد لأكثر من حوالي 6 إلى 7 أمتار.



مسار كرة ريشة، من اليسار إلى اليمين: تسقط وفق مسار أشد إنحدارا من مسار إرتفاعها

حركة كرة الريشة تمتثل *لقوانين نيوتن للحركة*. تسارعها يخضع لقوة الهبوط من الجاذبية، وقوة السحب من الهواء الذي يتناسب مع مربع سرعة كرة الريشة في الهواء. عندما يتم ضربها لأول مرة، كرة الريشة تتحرك بأقصى سرعة لها، قوة السحب بناءا عليه تكون أكبر بكثير من الجاذبية. ومنه فهي تتحرك صعودا وفق خط مستقيم، عند زاوية يُحددها اتجاه التأثير من المضرب، تتباطأ تدريجيا بالجاذبية. وفي نهاية المطاف تتباطأ بشدة إلى أن تصبح قوة الجاذبية مماثلة لقوة سحب الهواء ويبلغ المسار أقصى ارتفاع، بعدها ينزل المنحنى هبوطا نحو الأرض. الجاذبية الآن تُسرع بها، وعاجلا تُكسبها سرعة، تُدعى *السرعة النهائية*، أين تصبح القوى المتعاكسة للجاذبية (النازلة) وسحب الهواء (الصاعدة) متساوية. لا يوجد الآن أي شبكة قوى

تؤثر على كرة الريشة وهي تتحرك نزولا عند هذه السرعة النهائية الثابتة، دون أن تشهد أي تسارع أو تباطؤ. المسار العام لا يبدو كقطع مُكافئ: كرة الريشة تسقط وفق مسار أشد إنحدارا من مسار إرتفاعها.

السرعة النهائية لا تتوقف على سرعة الانطلاق الأولية لكرة الريشة. هي تتحدد بقوة الجاذبية، وكثافة الهواء، حجم وكتلة كرة الريشة، نعومتها. ونتيجة لذلك، فان هذه الخصائص غير المُتغيرة تعمل على تثبيت المسافة التي قد تبلغها كرة الريشة بعد ضربها بجهد قوي. ضربها بجهد مهما كان قويا لا يُمكنها من بلوغ مسافة أبعد مما ذكرناه سابقا.

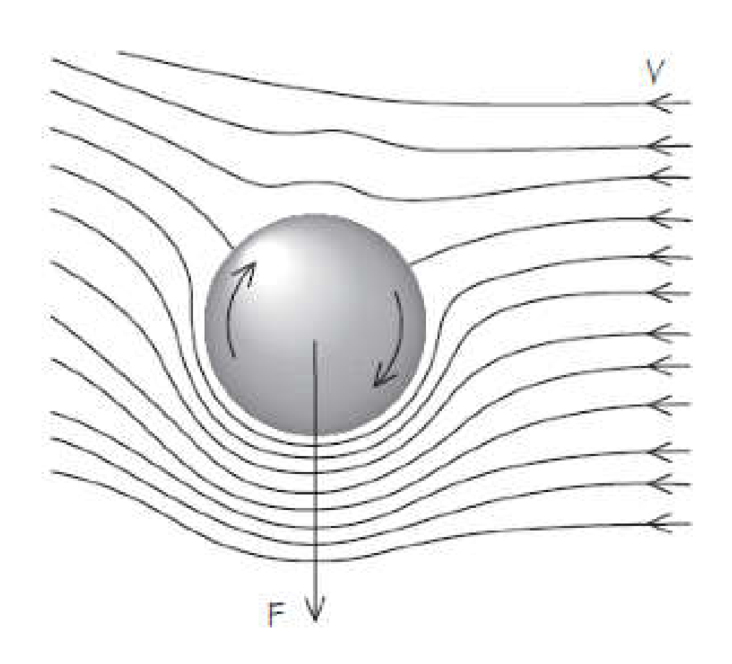
****

كرة الطائرة
(Volleyball)



واحدة من المهارات الأساسية التي على لاعبي كرة الطائرة إتقانها هي إرسال الكرة وفق أقصى لف مغزلي لها بحيث تسقط بشكل أسرع من قدرة مُستقبل الإرسال على توقعه أو ترقبه. وهذا ممكن لأن اللف المغزلي للكرة سوف يتبع مسار مُنحني في حين أن اللف–غير–المغزلي للكرة لا يفعل ذلك. سبب الانحراف يُمكن أن يُفهم من خلال النظر إلى تيار تدفق الهواء المار عبر الكرة. عندما يصطدم تيار تدفق الهواء بالكرة، خطوط التيار تُدفع إلى بعضها بعضا. مما يؤدي إلى هبوط الضغط وتزايد سرعة الهواء المار عبر سطح الكرة.

إذا كانت الكرة تلف مغزليا ستتغير وبشكل كبير خطوط تيار تدفق الهواء بالقرب من سطح الكرة. في المخطط على اليمين، باستطاعتك أن ترى ما يحدث لكرة لديها لف مغزلي باتجاه عقارب الساعة بالإضافة إلى حركتها في خط مستقيم بسرعة V من اليسار إلى اليمين.



تيار الهواء حول كرة تلف مغزليا

الحركة اللامغزلية هي تماما كما لو أن الكرة ساكنة مع سيرورة الهواء المار عبر سطحها بسرعة V. ما هو تأثير الحركة المغزلية؟ عند الجزء العلوي من سطح الكرة التي تلف مغزليا، سرعة الهواء القريب جدا من سطح الكرة يكون في الاتجاه المُعاكس لقدوم الهواء بينما في الجزء السفلي للكرة يكون في نفس الاتجاه. وهذا يعني أن السرعة الصافية، للهواء القريب من الجزء العلوي للكرة، أقل من مثيلتها حول الجزء السفلي. ومن ثَمَ سيكون الضغط على الكرة في الجزء العلوي أكبر منه في الجزء السفلي بالإضافة إلى أن هناك قوة صافية إلى الأسفل F . المتجه (الشعاع) في المخطط يُظهر كيف أن إرسال الكرة إلى اليمين وفق أقصى- لف-مغزلي سينحرف دائما إلى الأسفل. وهذا سيقلص من الوقت الذي قد تنفقه في الهواء ويمنح المُستَقبل للكرة وقتا أقل للرد وإرجاع الكرة.

****

مبرهنة النهاية المركزية

(The central limit theorem)

الفكرة المركزية في الإحصاء تتمثل في قدرتك على أن تقول شيئا عن العدد الإجمالي للسكان بالنظر إلى عينة أصغر. من دون هذه الفكرة لن يكون هناك استطلاعات للرأي أو توقعات في الانتخابات، لن يكون هناك أي وسيلة لاختبار الأدوية الطبية الجديدة، أو سلامة الجسور، الخ، الخ. إنها *مبرهنة النهاية*

المركزية والتي هي إلى حد كبير مسؤولة عن واقع أنه يمكننا فعل كل هذه الأمور وإحكام السيطرة على الشكوك التي تنطوي عليها



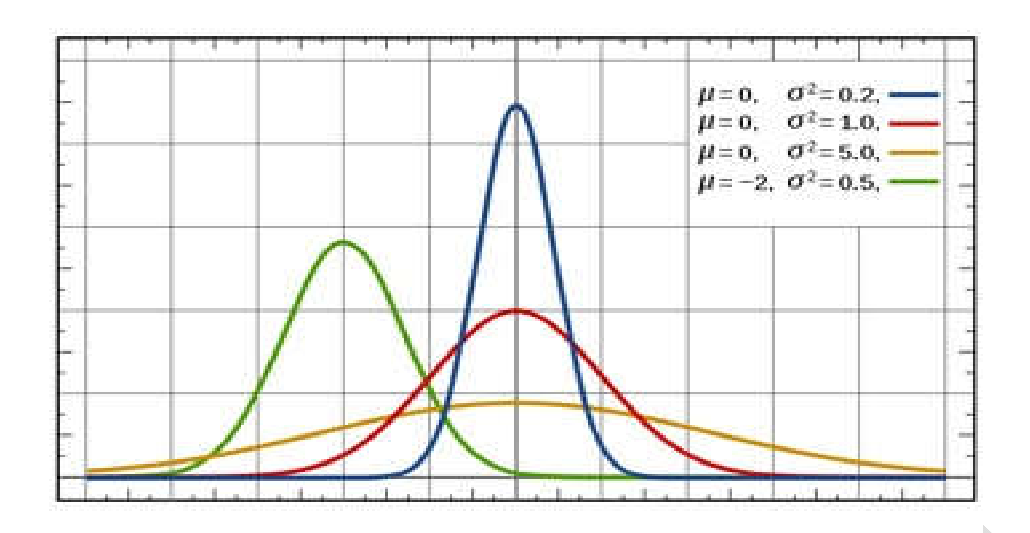
ما هو معدل وزن السكان؟

لنرى كيف تعمل المبرهنة، تخيل أنك تريد أن تعرف معدل (average) وزن السكان في المملكة المتحدة. يمكنك الخروج وقياس وزن، ولنقل، 100 شخص، كُنتَ قد اخترتهم عشوائيا، ثم وجدت معدل وزن هذه المجموعة – نُسمي هذا *مُعدل العينة*. الآن، من المُفترض أن يمنحك معدل العينة فكرة جيدة عن معدل الشعب. لكن ماذا لو صادف أنك قد اخترت أشخاصا ضخاما فقط لعينتك، أو أشخاصا هزيلين جدا لعينتك؟

للحصول على فكرة عن كيف على الأرجح، سيكون المعدل النموذجي الخاص بك، عليك أن تعرف شيئا عن معدل وزن عينات– من 100– شخص متفاوتة ومتنوعة من السكان: إذا أخذت الكثير والكثير من عينات من حجم 100 شخص ووجدت معدل وزن كل واحدة، وبالتالي مقدار التغير الذي قد تكون عليه مجموعة الأعداد تلك؟ وكم سيكون معدلها (معدل المعدلات) مُقارنة بمعدل الوزن الحقيقي للسكان؟

على سبيل المثال، افترض أنك تعرف أنه إذا أخذت الكثير والكثير من عينات– من 100– شخص وقمت بتدوين معدل وزن كل عينة، وحصلت على كل القيم من 10 كغ إلى 300 كغ بنسب متساوية. هذا من شأنه أن يُنَبهك أن طريقتك في تقدير المعدل العام بواسطة أخذ عينة من 100 شخص ليست طريقة جيدة جدا، لأن هناك الكثير من التباين – من المرجح، أنك كنت للتو، ستأخذ أي من القيم الممكنة، وأنت لا تعرف أيُها الأقرب إلى المعدل الحقيقي لوزن السكان.

ومنه كيف يمكننا أن نقول أي شيء عن توزيع معدلات– 100– شخص– يُدعى *التوزيع العيّني*–عندما لا نعرف أي شيء عن توزيع الوزن عند السكان؟ هنا أين تتدخل مبرهنة النهاية المركزية: والتي تقول أنه من أجل عينة كبيرة بما فيه الكفاية فان توزيعك العيّني يقترب من *التوزيع الطبيعي* – وهو التوزيع المشهور بشكل الجرس (المُتعارف عليه أن عينة بحجم 30، جيدة بما فيه الكفاية).



أمثلة متنوعة عن التوزيع الطبيعي
مع متوسطات وتباينات مختلفة.

متوسط (mean) هذا التوزيع الطبيعي (معدل المعدلات الموافق لقمة الجرس) مُماثل للمتوسط في عدد السكان (معدل وزن السكان). تباين هذا التوزيع الطبيعي، وهو مقدار التفاوت عن المتوسط (يتبين من خلال عُرض الجرس)، يعتمد على حجم العينة: أكبر عينة، أصغر تباين. هناك معادلة تُعطي العلاقة الدقيقة

وبالتالي إذا كان حجم عينتك كبيرا بما فيه الكفاية (100 بالتأكيد ستفي بالغرض بما أنها أكبر من 30)، ومنه فان التباين الصغير نسبيا للتوزيع العيّني العادي يعني أن معدل الوزن الذي رصدته قريب من متوسط التوزيع الطبيعي (بما أن الجرس ضيق جدا). وبما أن متوسط هذا التوزيع الطبيعي مُساوي للمعدل الحقيقي لوزن السكان، المعدل الذي رصدته هو تقريب جيد للمعدل الحقيقي.

يمكنك جعل كل هذا أكثر دقة، على سبيل المثال يمكنك التعبير بالضبط عن مقدار ثقتك في إحصائياتك، من خلال كون المعدل الحقيقي هو في حدود مسافة معينة من معدل عينتك، ويمكنك أيضا استخدام النتيجة لحساب حجم العينة التي تحتاجها للحصول على تقدير من دقة معينة. إنها مبرهنة النهاية المركزية التي من شأنها أن تُضفي الدقة على فن الاستدلال الإحصائي، وهي أيضا وراء واقع أن التوزيع الطبيعي هو السائد.

******

الجبر البولياني

(Boolean algebra)

في كل مرة تستخدم فيها الكمبيوتر، أنت تعتمد على *المنطق البولياني*: نظام منطق تأسس قبل فترة طويلة من انتشار أجهزة الكمبيوتر، اشتق اسمه من اسم عالم الرياضيات الانجليزي *جورج بول* (1815–1864). في عبارات المنطق البولياني يمكن أن تكون إما صحيحا أو خاطئا (على سبيل المثال. في الوقت الراهن "أريد فنجانا من الشاي" هي عبارة خاطئة، لكن "أريد قطعة من الكعك" هي دائما صحيحة)، ويمكنك مرادفة هذه معا باستخدام الكلمات وَ (AND)، **أو** (OR)، **ليس** (NOT) .

A	B	A و B
صحيحة	صحيحة	صحيحة
صحيحة	خاطئة	خاطئة
خاطئة	صحيحة	خاطئة
خاطئة	خاطئة	خاطئة

جدول حقيقة بسيط يُظهر جميع القيم الممكنة لـ " A و B "

لتحديد ما إذا كانت هذه العبارات المركبة صحيحة أو خاطئة، يُمكنك إنشاء ما يُدعى *جدول الحقيقة*، حيث قم بتسجيل جميع القيم الممكنة التي قد تتخذها العبارات الأساسية، ومن ثَمّ جميع القيم المُناظرة التي قد تتخذها العبارات المركبة.

جداول الحقيقة مفيدة للعبارات المنطقية البسيطة، لكن سرعان ما أصبح مُضجرا وعُرضَة للخطأ من أجل العبارات الأكثر تركيبا وتعقيدا. أتى بول بالغوث عن طريق تصريح إبداعي يفيد بأن العمليات المنطقية الثنائية تتصرف بطريقة مُلفتة للنظر، مماثلة لعملياتنا الحسابية العادية، مع انحرافات قليلة.

في هذا النوع الجديد من الحساب (يُدعى *الجبر البولياني*) المتغيرات هي عبارات منطقية (فضفضة، جُمل إما صحيحة أو خاطئة). يُمكن أن تتخذ قيمتين اثنين فقط، يمكننا أن نكتب 0 للعبارة التي نعلم أنها خاطئة و 1 للعبارة التي نعلم أنها صحيحة. ثم يمكننا استنساخ **أو** (OR) كنوع من الإضافة باستخدام $0s$ و $1s$ فقط.

$0+0=0$ (بما أن "خاطئة **أو** خاطئة" هي خاطئة)

$0+1=1+0=1$ (بما أن "صحيحة **أو** خاطئة" و "خاطئة **أو** صحيحة" هما على حد سواء صحيحة)

$1+1=1$ (بما أن "صحيحة **أو** صحيحة" هي صحيحة)

يمكننا أن نستنسخ **وَ** (AND) كنوع من الضرب:

$0\times1=1\times0=0$ (بما أن "خاطئة **وَ** صحيحة" و"صحيحة **وَ** خاطئة" هما على حد سواء خاطئة)

$0\times0=0$ (بما أن "خاطئة **وَ** خاطئة" هي خاطئة)

$1\times1=1$ (بما أن "صحيحة **وَ** صحيحة" هي صحيحة)

بما أن المتغيرات يمكنها أن تأخذ القيم 0 و 1 فقط، يمكننا تعريف العملية **ليس** (NOT) كمتممة، تأخذ العدد إلى نقيض (مُعاكس) قيمته:

إذا كانت $A=1$ ، إذن $A'=0$

إذا كانت $A=0$ ، إذن $A'=1$

$A+A'=1$ (بما أن "صحيحة **أو** خاطئة" هي صحيحة)

$A\times A'=0$ (بما أن "صحيحة **وَ** خاطئة" هي خاطئة)

نسختنا الجديدة عن هذه العمليات هي مماثلة في العديد من النواحي لمفاهيمنا المألوفة أكثر عن الجمع والضرب لكن مع وجود القليل من الاختلافات الرئيسية. أجزاء من المعادلات يمكن أن تختفي بسهولة في الجبر البولياني، الأمر الذي قد يكون عمليا جدا، على سبيل المثال، المتغير B في

$$A+A\times B$$

غير متصل بالمعادلة، مهما كانت قيمة B أو العبارة المنطقية التي يمثلها، هذا بسبب أنه إذا كانت A صحيحة (أو تكافئ $A=1$) إذن A أو (A **وَ** B) هي صحيحة، بغض النظر عما إذا كانت B صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت A خاطئة (أي أن، $A=0$) إذن (A **وَ** B) هي خاطئة، بعض النظر

عن قيمة B، ومنه A أو (A وَ B) هي خاطئة. وبالتالي الجبر البولياني يوفر لنا إخفاءا للعمل: العبارة $A+A\times B$ مُساوية للصيغة البسيطة A:

$$A+A\times B=A$$

أيضا، في الجبر البولياني هناك نوع الازدواجية العكسية بين الجمع والضرب:

$$(A+B)'=A'\times B' \quad \text{و} \quad (A\times B)'=A'+B'$$

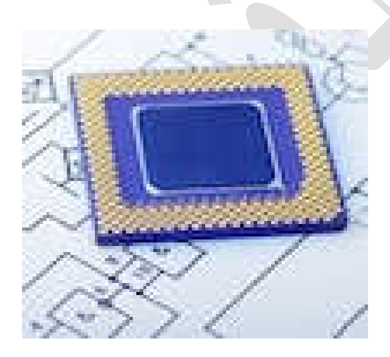
تُعرف هاتين المساوتين باسم *قوانين دي مورغان*، من عالم الرياضيات البريطاني *اوغسطس دي مورغان* (1806–1871). (يُمكنك التأكد بنفسك أنها صحيحة باستخدام ما يوافقها في جدول الحقيقة)

هذه مجرد حيلتين من حيل الجبر البولياني التي أخذت على عاتقها مهمة تبسيط العبارات المنطقية المعقدة – شكرا لك جورج!

****

تبسيط الدارات

(Simplifying circuits)

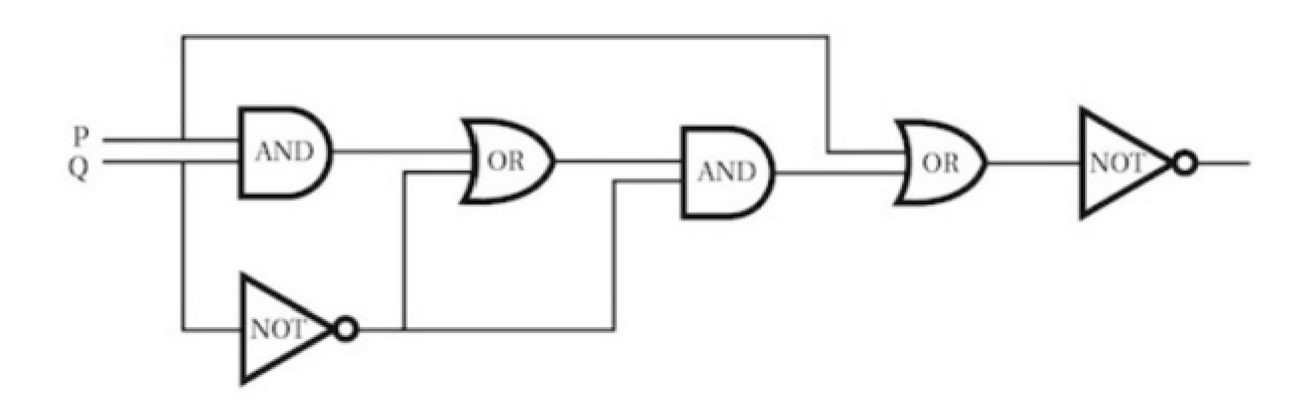


معظمنا يدرك أن العمل الذي تنجزه أجهزة الكمبيوتر الخاصة بنا يتم إتمامه عن طريق تقسيم المهام إلى سلسلة من عدد قليل من العمليات المنطقية. هذه العمليات هي – **وَ** (AND)، **أو** (OR)، **ليس** (NOT) – يمكن تمثيلها ماديا في دارات الكمبيوتر وتمثيلها رياضياتيا باستخدام *الجبر البولياني*. هذا الإدراك للروابط بين الدارات، المنطق والجبر تم لأول مرة من طرف *كلود شانون* (1916 – 2001)، الذي كان في سنة 1936 طالبا يبلغ من العمر 20 سنة في معهد ماساتشوستس للتقنية، يكتب في أطروحته للماجستير.

أخذ شانون بعين الاعتبار الدارات المعقدة للمقابس (switches) والمرحلات (relays) التي تم استخدامها في أماكن مثل المقاسم الهاتفية. لنفترض أن لديك تصميم دارة معقد، فوضى في الأسلاك

والمقابس. شانون أدرك أنه إذا قمت بكتابة عبارة الجبر البولياني الموافقة، يمكنك بسرعة استخدام قوانين التبسيط لإزالة المكونات والعناصر الزائدة في دارتك.

على سبيل المثال، نعتبر هذه الدارة:



مخطط هذه الدارة كُتب باختصار مع رموز لتمثيل البوابات (وَ (AND)، أو (OR)، ليس (NOT) التي تجمع قيم 1/0 لكل من P **و** Q.

الدارة أعلاه تتوافق مع العبارة الجبرية

$$((P\times Q+Q')\times Q'+P)'$$

يمكن تبسيط هذه العبارة الجبرية باستخدام قوانين الجبر البولياني كالآتي:

$$((P\times Q+Q')\times Q'+P)'$$

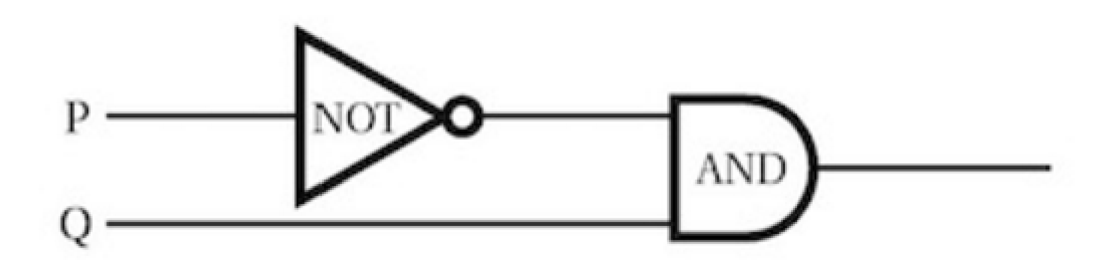
$=((P\times Q+Q')\times Q')'\times P'$ (عن طريق *قوانين دي مورغان*)

$=((P\times Q+Q')'+Q)\times P'$ (عن طريق *قوانين دي مورغان*)

$=((P\times Q)'\times Q+Q)\times P'$ (عن طريق *قوانين دي مورغان*)

$=Q\times P'$ (عن طريق *قاعدة التبسيط*)

ومنه تحليل الدارة الأصلية باستخدام الجبر البولياني كشف عن دارة بسيطة مع بوابتين اثنين فقط، ستعمل وبنفس براعة الدارة الأصلية المعقدة.



هذه الدارة البسيطة، مع بوابتين اثنين فقط، تُعادل الدارة الأصلية المعقدة

قبل عمل شانون، تبسيط تصميم الدارات تضمن كتابة جميع المواضع الممكنة للمقابس في الدارة وتتبع سلسلة التأثيرات لكل واحدة منها، من خلالها. وهي عملية وصفها هو نفسه بـ" المملة جدا والمفتوحة على الأخطاء". لكن الآن، وذلك بفضل بصيرته، أي دارة يمكن وصفها وتبسيطها باستخدام الجبر البولياني.

****

التوقع
(Expectation)



عند دحرجة زهر نرد مُتعادل الأسطح، لديك فرص متساوية للحصول على كل رقم من الستة أرقام 1 إلى 6. مع ذلك، *القيمة المتوقعة* لِلَفَة زهر النرد الخاصة بك هي 3.5. لكن كيف يمكن أن يكون هذا؟ هذا الرقم لا يوجد حتى في زهر النرد!

في نظرية الاحتمالات، *التوقع أو القيمة المتوقعة*، هو المعدل المثالي (idealised average) الذي يعكس احتمال النتائج الممكنة لشيء ما. في نموذج زهر النرد الخاص بنا، كل رقم من الأرقام الستة لديه احتمال من $\frac{1}{6}$ من الدحرجة. هذا يعني أنه إذا قمت بدحرجة زهر النرد الكثير والكثير من المرات، فإنه يجب أن تشاهد 1 في ما يقرب من $\frac{1}{6}$ من كل الدحرجات، 2 في ما يقرب من $\frac{1}{6}$ من كل الدحرجات، 3 في ما يقرب من $\frac{1}{6}$ من كل الدحرجات، وهكذا دواليك. وبالتالي إذا قمت بدحرجة زهر النرد n مرة، إذا كل رقم من الأرقام سيظهر في ما يقرب من $\frac{1}{6}$ مرة.

هذا المخطط يوضح كيف تتقارب متسلسلة معدلات تدحرج زهر النرد (باللون الأحمر) إلى القيمة المتوقعة 3.5 (باللون الأخضر) كلما زاد عدد الدحرجات

وبناءا عليه، فإن العدد الذي تحصل عليه عندما تحسب معدل جميع النتائج من n من الدحرجات، مُساوي لما يقرب من:

$$A=\frac{(\frac{n}{6}\times1+\frac{n}{6}\times2+\frac{n}{6}\times3+\frac{n}{6}\times4+\frac{n}{6}\times5+\frac{n}{6}\times6)}{n}$$

$$=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$$

قانون الأعداد الكبيرة يقول أنه مع تزايد العدد n يقترب المعدل الفعلي من 3.5. العدد 3.5 هو، بعبارة أخرى، المعدل الذي ستحصل عليه إذا قمت بدحرجة زهر النرد لعدد لا نهائي من المرات.

نفس الفكرة تعمل بشكل أعم، افرض أن زهر النرد الخاص بك غير مُتعادل الأسطح، وبالتالي فإن الأرقام الستة لا تملك جميعا نفس الاحتمال في الظهور. افرض أن احتمال 1 هو p_1 ، احتمال 2 هو p_2 ، وهكذا دواليك. معدل النتائج لعدد كبير n من الدحرجات هو بالتالي ما يقرب من:

$$A=\frac{(p_1n\times1+p_2n\times2+p_3n\times3+p_4n\times4+p_5n\times5+p_6n\times6)}{n}$$

$$=p_1n\times1+p_2n\times2+p_3n\times3+p_4n\times4+p_5n\times5+p_6n\times6$$

هذه هي الفكرة وراء التعريف العام للتوقع. إذا كان *متغير عشوائي* له m نتائج ممكنة X_1 وصولا إلى X_m ، مع احتمالات مقابلة p_1 وصولا إلى p_m ، وبالتالي فإن القيمة المتوقعة للنتائج هي:

$$E=p_1\times X_1+p_2\times X_2+...+p_m\times X_m$$

****

الفهرس

وتستمر سلسلة

الرياضيات في دقيقة – Maths in a minute

على جدران المجلة



قراءة ممتعة...